Interro n°3

Penser à aborder le 10.1, et éventuellement le 11.1.

Exercice 1.

1. Énoncer la formule de Pascal.
2. Démontrer la formule du binôme de Newton.

Exercice 2. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{e^{(k+1)^2}}{e^{k^2}}$

Exercice 3. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} k! \leqslant (n+1)!$.

Exercice 4. Calculer $\prod\limits_{k=1}^{n} \frac{2k+3}{2k-1}$

Exercice 5. Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \min(i,j)$
2. $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \min(i,j)$

Exercice 6. Calculer

1. $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!k!}$.
2. $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!(k+1)!}$.

Exercice 7.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la fonction partie entière, paramétriser l'ensemble des entiers k tels que $0 \leqslant 3k+2 \leqslant n$.
2. Calculer

   (a) $\sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{n} k$

   (b) $\sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \equiv 2[3]}}^{n} k$

Exercice 8.

1. À l'aide de la fonction $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k$, déterminer la somme $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$
2. ★ Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $C(k)$ le nombre de chiffre de l'écriture de k en base 10. On pose $n = 10^p - 1$, calculer la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} C(i)$.

   Indication : *Regrouper les termes.*

Exercice 9. On considère un polynôme $P = X^4 + pX^2 + qX + r$, avec $r \neq 0$. On suppose que P est scindé de racines x_1, x_2, x_3, x_4, c'est-à-dire que $P = \prod_{i=1}^{4}(X - x_i)$.

1. Exprimer r, q et p en fonction des racines.
2. Justifier l'existence et calculer $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$ en fonction de p, q, r.
3. En utilisant $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, calculer $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$, en fonction de p, q, r.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $\sum\limits_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^m$, en fonction de $m \in \mathbb{N}$.
2. Pour $z \in \mathbb{C}$, montrer que $\sum\limits_{\omega \in \mathbb{U}_n} (z+\omega)^n = n(z^n + 1)$.

Exercice 11. Soit $p \in \mathbb{N}$, et $m \geqslant p$.

1. Montrer que $\sum\limits_{n=p}^{m} \binom{n}{p} = \binom{m+1}{p+1}$.
2. ★ Calculer $\sum\limits_{n=p}^{m} n\binom{n}{p}$.

   Indication : *Ou bien appliquer la formule de Pascal, ou bien forcer l'apparition d'une formule du capitaine.*

Exercice 12. Inégalité de Tchebychev. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ et $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \cdots \leqslant y_n$ des réels. En remarquant que la quantité $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (x_i - x_j)(y_i - y_j)$ est positive, montrer que

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Exercice 13. ★ Décomposition factorielle. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{N}$ tels que $\forall i,\ x_i \leqslant i$, $x_p \neq 0$ et $n = \sum_{k=1}^{p} x_k k!$ et que cette écriture est unique.
Indication : *Pour l'unicité, on utilisera* $\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$.

Exercice 14. ★

1. Soient $\varphi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\varphi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Calculer $\varphi_1\varphi_2$ et $\varphi_1 + \varphi_2$. En déduire que $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que la distance de $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ à $\mathbb{Z}$ tend vers 0, lorsque $n \to +\infty$.