# Interro n°3

**Exercice 1.** Soit $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to Z$.

1. Donner les définitions formelles de $f$ injective et $f$ surjective.
2. Montrer que si $g$ et $f$ sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
3. Montrer que si $g$ et $f$ sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

**Exercice 2.** Soient $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

1. Donner une expression de $\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2$ en fonction d'une somme double rectangulaire.
2. Donner une expression de $\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2$ comme la somme de deux sommes, dont une triangulaire.

**Exercice 3.** Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \quad x \mapsto \frac{x}{x+1}$. On note $f^{(n)} = f \circ f \circ \cdots \circ f$.

1. Expliciter et simplifier les composées $f^{(2)}$ et $f^{(3)}$.
2. Conjecturer une expression de $f^{(n)}$, et la démontrer.

**Exercice 4.** On considère les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par $f\colon n \mapsto 2n$ et $g\colon n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Expliciter sans justifier $g(\llbracket 1, 10 \rrbracket)$ et $g^{-1}(\{0\})$.
2. Expliciter $g \circ f$ et $f \circ g$.
3. Justifier que $g$ et $f$ ne sont pas bijectives.

**Exercice 5.** Soit $h\colon x \mapsto \ln(1 + \sqrt{x})$.

1. Montrer que $h$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle $I$ à expliciter.
2. Déterminer une expression de la réciproque $h^{-1}\colon I \to \mathbb{R}_+$.

**Exercice 6.** On rappelle le lemme de Gauss : si $a$ et $n$ sont premiers entre eux et $a \mid nc$, alors $a \mid c$.
Soit $n \geqslant 2$ et $a$ un entier premier avec $n$. On considère l'application $f\colon \llbracket 0, n-1 \rrbracket \to \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ qui à tout entier $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ associe le reste de la division euclidienne de $ak$ par $n$.

1. Montrer que $f$ est injective, puis bijective.
2. En déduire qu'il existe $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $ak \equiv 1[n]$.

**Exercice 7.** On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par $f \,\mathcal{R}\, g$ si et seulement s'il existe une bijection $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi \circ f = g \circ \varphi$.

1. Pour $\varphi$ bijective, justifier l'équivalence $\varphi \circ f = g \circ \varphi \Leftrightarrow \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = g$.
2. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

**Exercice 8.**

1. Écrire une fonction `suite` qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$ et renvoie le terme $u_n$ de la suite définie par $u_1 = 2$ et $\forall n \geqslant 1,\ u_{n+1} = 2u_n^2 + 1$.
2. Écrire une fonction `somme` qui prend en argument $n \geqslant 1$ et renvoie $\sum_{k=n}^{2n} u_k$. (Une implémentation optimisant le nombre d'opérations sera valorisée.)
3. Écrire une `ppp2` fonction qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et renvoie le plus petit entier de la forme $2^k$ vérifiant $2^k \geqslant n$ (sans utiliser le calcul sur les flottants).
4. ★ Écrire une fonction `nb_23` qui prend en argument deux entiers $a, b \in \mathbb{N}^*$, avec $a \leqslant b$ et renvoie le nombre d'entiers de la forme $2^k 3^\ell$ dans l'intervalle $\llbracket a, b \rrbracket$, en minimisant le nombre de multiplications/divisions entières effectuées.

**Exercice 9.** Soit $f\colon E \to F$.

1. Rappeler, pour $A \subset E$ et $B \subset F$ les définitions de $f(A)$ et $f^{-1}(B)$.
2. Soit $B \subset F$, montrer que $f(f^{-1}(B)) = B$ si et seulement si $B \subset f(E)$.
3. ★ Montrer que $f$ est bijective si et seulement si pour toute partie $A$ de $E$, $f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}$.

**Exercice 10. Inégalité de Tchebychev**. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ et $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \cdots \leqslant y_n$ des réels.
En remarquant que la quantité $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (x_i - x_j)(y_i - y_j)$ est positive, montrer que

$$\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

**Exercice 11.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ impair. Montrer que $\{\omega^2,\ \omega \in \mathbb{U}_n\} = \mathbb{U}_n$.

**Exercice 12.** Pour $a \in \mathbb{Z}^*$, on s'intéresse à l'existence d'une fonction $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $(*)\colon \forall n,\ (f \circ f)(n) = n + a$.

1. Pour $a$ pair, expliciter une telle fonction.
2. Soit $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ vérifiant $(*)$.
   (a) Montrer que $f$ est bijective.

(b) ★ Soit $x \in \mathbb{Z}$. Montrer que les $f^{(n)}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ sont tous distincts.

Le résultat s'étend de même à $n \in \mathbb{Z}$, avec la convention $f^{(n)} = \left(f^{-1}\right)^{-n}$, pour $n \leqslant 0$. On admet que la relation $x \sim y \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, \left(f^{(n_0)}(x) = y \text{ ou } f^{(n_0)}(y) = x\right)$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

(c) ★ Décrire la forme des classes d'équivalence de $\sim$. Pour $a$ impair, obtenir une contradiction.

**Exercice 13.** ★ Montrer que le produit de deux bijections $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ne peut pas être bijectif.