Interro n°4

Les questions 8.1, 9.1, 10.1 sont du cours.

Exercice 1. Calculer la dérivée de la fonction

1. $\frac{1}{(\cos x)^8}$
2. $\arctan \frac{1}{x^2}$
3. $\arcsin \sqrt{x}$

Exercice 2. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$, $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

Exercice 3.

1. Montrer que pour $n \geqslant 1$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $\left|x_1 + \dots + x_n\right| \leqslant |x_1| + \dots + |x_n|$.
2. Pour $p \geqslant 2$, et pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $S_p(x) = \sum_{k=1}^{p} \cos(\sqrt{k}x)$ et $T_p(x) = \sum_{k=1}^{p} \sin(kx)$
   (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|S_p(x)| \leqslant p$ et $|T_p(x)| \leqslant \frac{p(p+1)}{2}|x|$.
   (b) ★ Montrer que S_p n'est pas périodique.

Exercice 4.

1. Donner deux définitions équivalentes de la densité d'une partie A dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{E(2^n x)}{2^n}$. Donner un encadrement de u_n, et en déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_2 = \left\{\frac{k}{2^n},\, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Soit $\alpha > 0$. On considère la fonction $f\colon t \mapsto (\frac{\alpha}{t})^t$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ? On se contentera d'un intervalle.
2. Étudier l'existence d'un maximum de f.

Exercice 6.

1. Montrer que $\forall x \in [0, 1]$, $2x^3 - 3x^2 + 1 \geqslant 0$.
2. En déduire que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $2\sin x + \tan x \geqslant 3x$.
   Indication : *Utiliser une expression judicieuse de la dérivée de* tan.

Exercice 7. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $\quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$.

Exercice 8.

1. Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour des réels $x_1, \dots, x_n$ et $y_1, \dots, y_n$.
2. Soit $P\colon x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polynôme réel à coefficients positifs. Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $P(x^2)P(y^2) \geqslant P(xy)^2$.
   Indication : $a_k = \sqrt{a_k}\sqrt{a_k}$

Exercice 9.

1. Rappeler la formule d'addition pour $\tan(a + b)$.
2. Montrer que $\arctan(2\sqrt{2}) + 2\arctan(\sqrt{2}) = \pi$.
3. ★ En déduire la valeur de $\arctan \frac{1}{2\sqrt{2}} + 2\arctan \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 10. Inégalité de Young.

1. Donner la définition d'une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe dérivable. Écrire l'inégalité de convexité à 2 variables pour une telle fonction qui traduit sa position par rapport à ses cordes.
2. Soient $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer l'inégalité de Young : pour $a, b > 0$, $\quad \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geqslant ab$.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \geqslant 0$. Montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{i}\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{x_i x_j}{i + j - 1}.$$

Exercice 12. ★ Soit $A = \{\sqrt{m} - \sqrt{n},\, (n, m) \in \mathbb{N}^2 \text{ tq } m > n\}$.

1. Montrer que A est dense au voisinage de 0, c'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u \in A$ tel que $u < \varepsilon$.
2. Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 13. ★ **Valeurs rationnelles de** $\cos(\pi r)$. Soit $r \in \mathbb{Q}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = 2\cos(2^n \pi r)$.

1. Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs.
2. Expliciter une relation de récurrence vérifiée par la suite (a_n).
3. On suppose que $\cos(\pi r) \in \mathbb{Q}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{Z}$. En déduire les valeurs possibles de r.