Interro n°5

Pour montrer qu'une quantité tend vers 0, ou bien l'encadrer, ou bien majorer sa valeur absolue.

Exercice 1. Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto xe^{-3x^2}$
2. $x \mapsto \frac{x^2}{1+x^3}$
3. $x \mapsto \frac{\sin x}{\cos^4 x}$

Exercice 2. On considère $g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\sin(x^2)}{1+x^2} \end{array}$.

1. Rappeler la définition d'une fonction lipschitzienne.
2. Montrer que g est 2-lipschitzienne.
   Indication : *Utiliser l'inégalité* $2|x| \leqslant 1 + x^2$.

Exercice 3. On considère la fonction F suivante, définie sur $\mathbb{R}$.

$$F\colon x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2+t^4}}.$$

1. Justifier que F est dérivable et calculer sa dérivée.
2. Montrer que F est impaire.
   Indication : *Changement de variable.*
3. Montrer que $F(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

Exercice 4. Calculer l'intégrale $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$
Indication : *Changement de variable.*

Exercice 5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que $f\colon t \mapsto (1-t)^n e^t$ est bornée sur $[0,1]$.
2. Montrer que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
   Indication : *Il ne suffit pas de dire que l'intégrande tend vers* 0.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{(n+1)!}$.
4. En déduire une expression de u_n à l'aide d'une somme, puis que $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$, c'est-à-dire que $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e$.

Exercice 6. Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^3+t+x}$. Montrer que F est décroissante.

Exercice 7.

1. Donner sans justifier une primitive de ln.
2. Pour $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln k$.
   (a) En écrivant, pour $k \in [\![2, n]\!]$, une minoration de $\ln k$ par une intégrale, montrer que, pour $n \geqslant 2$, $S_n \geqslant n \ln n - n$.
   (b) En déduire que $\ln(n!) \sim_{+\infty} n \ln n$, c'est-à-dire $\frac{\ln(n!)}{n \ln n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

Exercice 8.

1. Soit $x \in [0,\pi[$. On pose $t = \tan \frac{x}{2}$. Montrer que $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$.
2. Calculer $\int_0^1 \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) \mathrm{d}t$.

Exercice 9.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $|\arctan(n+1) - \arctan n| \leqslant \frac{1}{n^2}$.
2. ★ Pour $x > 0$, montrer que $\left|\arctan x - \frac{\pi}{2}\right| \leqslant \frac{1}{x}$.

Exercice 10. ★ Soit $f_n\colon x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^n}$.

1. Justifier qu'il existe une unique primitive F_n de f_n qui s'annule en 0.
2. Déterminer une relation de récurrence entre F_{n+1} et F_n.
   Indication : $1 = \frac{1+t^2}{1+t^2}$

Exercice 11. ★ **Une inégalité de Young**.

1. Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$ et $f' > 0$. Montrer que pour tout $a \geqslant 0$ on a

$$af(a) = \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{f(a)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t$$

2. En déduire que pour $b \geqslant 0$ on a

$$ab \leqslant \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^b f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad ab \leqslant af(a) + bf^{-1}(b).$$