

Interro n°6

En priorité : $\rightarrow 9 + 10.1, 11.1.$

Exercice 1. Soit $(u_n), (v_n)$ deux suites qui convergent vers $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ respectivement.

1. Donner la définition formelle de $u_n \rightarrow \ell$.
2. Montrer que la suite $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell + \ell'$.
3. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il n'est pas possible qu'on ait à la fois $u_n \rightarrow \ell$ et $u_n \rightarrow +\infty$.

Exercice 2. Étudier la limite des suites

1. $\frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}$
2. $\frac{\ln(n+e^n)}{n}$
3. $n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$

Exercice 3. Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie donner une preuve, sinon, donner un contre-exemple.

Indication : La plupart sont fausses. On peut définir une suite en posant $u_n = \begin{cases} \dots & \text{si } n \text{ pair} \\ \dots & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Si la suite (u_n^2) converge, la suite (u_n) converge.
2. Si $(u_n + v_n)$ converge, alors (u_n) et (v_n) convergent.
3. Si (u_n) converge, $(\lfloor u_n \rfloor)$ converge.

Exercice 4. Pour $z, z' \in \mathbb{C}$, on pose $z \leq z' \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, z' = z^{2^n}$.

1. Montrer que \leq est réflexive et transitive.
2. ★ \leq est-ce une relation d'ordre ?

Exercice 5. Soit (u_n) une suite réelle à valeurs dans $]0,1[$ telle que $\frac{u_n}{1-u_n} \rightarrow 0$. Montrer que $u_n \rightarrow 0$.

Indication : Penser encadrement.

Exercice 6. On considère une suite vérifiant $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n}$.

1. Montrer que si (u_n) tend vers une limite finie ℓ , alors $\ell \geq 0$, puis $\ell = \frac{1}{2+\ell}$. En déduire la valeur de ℓ .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{|u_n - \ell|}{4}$.
3. En déduire que (u_n) converge.

Indication : Remplacer ℓ par $\frac{1}{2+\ell}$.

Indication : Que dire de $|u_n - \ell|$?

Exercice 7. Soit $A = \left\{ \frac{n+3m}{n+m}, (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \right\}$. Montrer que $\inf A = 1$ et $\sup A = 3$.

Exercice 8.

1. Écrire une fonction `chiffres` qui prend en argument un entier n et renvoie la liste de ses chiffres décimaux, du chiffre des unités au chiffre de poids maximal. Par exemple, `chiffres(5479)` renverra `[9, 7, 4, 5]`.
2. Écrire une fonction `chiffres_bis` qui les renvoie dans l'ordre inverse : `chiffres_bis(5479)` renverra `[5, 4, 7, 9]`.

Exercice 9. Soit (u_n) une suite croissante. On considère $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$. Montrer que (v_n) est croissante.

Exercice 10. Soit $a > 0$. On définit une suite (u_n) par $u_n = (1+a)(1+a^2) \dots (1+a^n)$.

1. Montrer que si $a \geq 1$, (u_n) est divergente.
2. En utilisant l'inégalité $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x$, montrer que si $0 < a < 1$, (u_n) est convergente.

Indication : Montrer que (u_n) est majorée.

Exercice 11. Distance à une partie. Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $d(x, A) = \inf_{a \in A} |x - a|$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, justifier la définition de $d(x, A)$.
2. Pour $y \in \mathbb{R}$, énoncer la caractérisation séquentielle de la borne supérieure pour $d(y, A) = \inf_{a \in A} |y - a|$.
3. Montrer que pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a $d(x, A) - d(y, A) \leq |x - y|$. En déduire que $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.

Exercice 12. Soit $u_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{1}{n} + \frac{k}{n^3}\right)$.

1. Montrer que $|u_n - n \sin \frac{1}{n}| \rightarrow 0$.
2. Montrer que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$.

Indication : L'objectif est de faire intervenir le caractère 1-lip de \sin .

Exercice 13. ★ Pour $k \geq 2$, on considère $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ vérifiant

$$\forall A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}, \forall A \in \mathcal{P}(E), \quad (\forall i \neq j, A_i \cap A_j \subset A) \Rightarrow A \in \mathcal{A}.$$

On dit que \mathcal{A} est k -clos.

1. On suppose que $k = 2$. Montrer que \mathcal{A} contient au plus un élément minimal. En contient-elle forcément un ?
2. Soit $A_0 \in \mathcal{A}$. Pour tout $C \subset A_0$, on note $\mathcal{A}_C = \{A \in \mathcal{A} \mid A \cap A_0 = C\}$ et $\tilde{\mathcal{A}}_C = \{A \setminus A_0, A \in \mathcal{A}_C\} \subset \mathcal{P}(E \setminus A_0)$. Montrer que \mathcal{A}_C est $(k-1)$ -clos comme partie de $\mathcal{P}(E \setminus A_0)$.
3. Montrer que le nombre d'éléments minimaux de \mathcal{A} de taille r est au plus $(k-1)^r$.

Exercice 14. ★ Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bornée. Montrer que $\sup_{x \in \mathbb{R}} \inf_{y \in \mathbb{R}} f(x, y) \leq \inf_{y \in \mathbb{R}} \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x, y)$.