Interro n°6

Exercice 1. Soit $(u_n), (v_n)$ deux suites qui convergent vers $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ respectivement.

1. Donner la définition formelle de $u_n \to \ell$.
2. Montrer que la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell + \ell'$.

Exercice 2. Soit $(u_n), (v_n)$ deux suites réelles. À quelles conditions ces suites sont-elles adjacentes ?

Exercice 3. Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie donner une preuve, sinon, donner un contre-exemple.

1. Si $\lim u_n = 0$, $\lim(1 + u_n)^n = 1$.
2. Si $u_{n+1} - u_n \to 0$, alors (u_n) converge.
3. Si $u_n \to +\infty$, alors (u_n) est croissante APCR.

Exercice 4. On considère $S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k+1}}$. Déterminer la limite de S_n.
Indication : *Minorer S_n.*

Exercice 5. Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. Montrer que si (u_n^2) est bornée, la suite (u_n) est bornée.
2. On suppose que (u_n) est croissante et que $u_n^2 \to \ell \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $\ell \geqslant 0$
   (b) Montrer que (u_n) converge.
   (c) Que dire de la limite de (u_n) ? Justifier.

Exercice 6. Pour $z, z' \in \mathbb{C}$, on pose

$$z \preceq z' \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ z' = z^{2^n}.$$

1. Montrer que $\preceq$ est réflexive et transitive.
2. ★ $\preceq$ est-elle une relation d'ordre ?

Exercice 7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de termes strictement positifs. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$, avec $\ell > 1$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $1 < a < \ell$. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant a$ à partir d'un rang n_0. On redémontrera tout résultat du cours.
2. Donner sans justifier une minoration, pour $n \geqslant n_0$, de u_n en fonction de a et u_{n_0}. En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall n \geqslant n_0 \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant Ca^n$.

Ce résultat est également valable si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to +\infty$.

3. Étudier la limite, quand $n \to +\infty$, de $u_n = \frac{n!}{a^n}$.

Exercice 8. Soit $a > 0$. On définit une suite (u_n) par $u_n = (1 + a)(1 + a^2)\dots(1 + a^n)$.

1. Montrer que si $a \geqslant 1$, (u_n) est divergente.
2. En utilisant l'inégalité $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1 + x$, montrer que si $0 < a < 1$, (u_n) est convergente.

Exercice 9. ♡ **Lemme de Cesàro**. Soit (u_n) une suite tendant vers $+\infty$. Montrer que $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$ tend vers $+\infty$.

Exercice 10. ★ Soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{1}{n} + \frac{k}{n^3}\right)$.

1. Montrer que $\left|u_n - n \sin\frac{1}{n}\right| \to 0$.
2. Montrer que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

Exercice 11. ★ Soit (u_n) une suite positive vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} \leqslant \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$.

1. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \max(u_n, u_{n+1})$ est décroissante, et converge vers une limite ℓ.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Si $v_n \leqslant \ell + \varepsilon$ et $u_{n+1} < \ell - \varepsilon$, montrer que $v_{n+1} < \ell$.
   En déduire que $u_n \to \ell$.

Exercice 12. ★ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bornée. Montrer que $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \inf\limits_{y\in\mathbb{R}} f(x, y) \leqslant \inf\limits_{y\in\mathbb{R}} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x, y)$.

Exercice 13. ★ Soit $K > 1$ et (ε_n) une suite positive qui tend vers 0. Soit (u_n) une suite vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{u_n + \varepsilon_n}{K}.$$

1. Montrer que (u_n) est bornée.
   Indication : *Majorer explicitement u_n, en fonction de u_0.*
2. Montrer que $u_n \to 0$.
   Indication : *Procéder comme dans la question précédente.*