

Interro n°7

Exercice 1.

1. Donner, et démontrer, une forme factorisée de $e^{i\theta} + 1$
2. Donner, et démontrer, une forme factorisée simple de $e^{i\theta} - 1$
3. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(kx)$

Exercice 2.

1. Donner la forme exponentielle de $(1 + i)$ et de $\sqrt{3} + i$.
2. À l'aide du nombre complexe $(1 + i)(\sqrt{3} + i)$, déterminer $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$

Exercice 3.

1. Montrer que pour $z, z' \in \mathbb{C}$, $|z + z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2 \operatorname{Re}(z\bar{z}')$.
2. Montrer que pour $z, z' \in \mathbb{C}$, $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Exercice 4. Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites définies par $0 < u_0 < v_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.

1. Justifier brièvement que les deux suites sont bien définies et que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$.
2. À quelles conditions les suites (u_n) et (v_n) sont-elles adjacentes ?
3. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

Exercice 5.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \operatorname{Re}((3 + 4i)^n)$ et $b_n = \operatorname{Im}((3 + 4i)^n)$.
Déterminer une relation de récurrence vérifiée par les suites (a_n) et (b_n) .

■ On peut en déduire par une récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_n \equiv 3[5]$ et $b_n \equiv 4[5]$, ce que l'on admet.

2. On considère $z_0 = \frac{3+4i}{5}$. Vérifier que $|z_0| = 1$, et en utilisant la question précédente, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, z_0^n \neq 1$.
3. ★ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un cercle du plan qui contient (au moins) n points à coordonnées entières.

Exercice 6.

 Résoudre l'équation

1. $z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$
2. $\bar{z}^7 = i$
3. $z + \bar{z} = |z|$

Exercice 7. Soit (u_n) une suite réelle qui tend vers 0. Pour $n \geq 1$, on pose $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$. Montrer que $v_n \rightarrow 0$.

Exercice 8.

1. Donner la définition d'une valeur d'adhérence d'une suite (u_n) . Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass.

■ On considère une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée. On note \mathcal{V} l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) .

2. Montrer que \mathcal{V} est bornée.
3. ★ Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathcal{V} . On suppose que (α_n) converge vers $\beta \in \mathbb{R}$. Montrer que $\beta \in \mathcal{V}$.
4. Justifier que (u_n) admet une plus grande valeur d'adhérence.

Exercice 9.

1. Écrire une fonction `sans_occurrences` qui prend en argument un élément `e` et une liste `l` et qui renvoie une nouvelle liste, contenant les mêmes éléments que `l`, mais en retirant toutes les occurrences de `e`.
2. Écrire une fonction `suppression_indice` qui prend en argument une liste `l` et un indice `i` dans la liste `l` et modifie la liste `l` de sorte à retirer son élément d'indice `i`, et préserver l'ordre des autres éléments de `l`.
Indication : Faire des échanges à des indices consécutifs pour déplacer l'élément à retirer à la fin de la liste.
3. Écrire une fonction `retire` qui prend en argument un élément `e` et une liste `l` et qui modifie la liste `l` en lui retirant toutes les occurrences de `e`.
4. ★ Proposer une version avec une complexité linéaire dans le pire des cas.

Exercice 10. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $n \geq 2$.

1. Montrer que l'équation $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \alpha$ admet au moins une solution.
2. Montrer que les complexes vérifiant $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \alpha$ sont tous réels si et seulement si $|\alpha| = 1$.

Indication : Il n'est pas nécessaire d'explicitier les solutions de l'équation.

Exercice 11. ★ Soit (u_n) une suite positive majorée vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} \geq 2u_n - \frac{1}{n}$. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 12. ★ Soient $1 \leq k < n$ deux entiers. Alice et Bob jouent à un jeu avec n trous alignés et k boules. Initialement les k boules sont sur les k premiers trous. À chaque tour, le joueur doit déplacer une boule d'un des trous à un trou libre plus à droite. Le joueur qui ne peut pas jouer perd. Alice commence.

1. Dans les cas $k = 1$ puis $k = 2$ et $n \leq 5$, puis $k = 2$ et n quelconque, étudier l'existence d'une stratégie gagnante pour Alice.

2. En général, montrer que Alice a une stratégie gagnante si et seulement si l'un des deux entiers k, n est impair.

Indication : Si k et n sont pairs, décrire une stratégie qui garantisse que le second joueur puisse toujours jouer.