Interro n°7

Exercice 1. Soit $f\colon I \to I$ une fonction continue et (u_n) une suite vérifiant $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On suppose $u_n \to \ell$, avec $\ell \in I$. Montrer que ℓ est un point fixe de f.
2. Montrer que si f est croissante, alors la suite (u_n) est monotone.
   Indication : *Faire une disjonction de cas, sur les deux premiers termes.*

Exercice 2.

1. Donner la définition d'une valeur d'adhérence d'une suite (u_n).
2. Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass.
3. ★ Soit (a_n), (b_n) deux suites bornées. Montrer qu'il existe une extractrice φ telle que les suites $(a_{\varphi(n)})$ et $(b_{\varphi(n)})$ convergent.

Exercice 3. Soit (u_n) une suite vérifiant $u_0 \geqslant 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n}$.

1. Montrer que $f\colon x \mapsto \frac{1}{2+x}$ est K-lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$, pour une constante $K < 1$.
2. Vérifier que f admet un unique point fixe $a \in \mathbb{R}_+$.
3. Montrer que $|u_n - a| \to 0$.

Exercice 4. Soit $f\colon \mathbb{R} \to [0,1[$ une fonction continue, et (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n f(u_n)$.

1. Expliciter une fonction g telle que $\forall n$, $u_{n+1} = g(u_n)$.
2. Montrer que $[0,1]$ est stable par g.
   Indication : *Penser à utiliser* $\forall x$, $0 \leqslant x < 1$.
3. Étudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice 5. Soit $f\colon x \mapsto \frac{x^3+3x}{3x^2+1}$ et (u_n) vérifiant $u_0 \geqslant 0$ et $\forall n$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier les variations de f.
   Indication : *Reconnaître un carré.*
2. Étudier le signe de $f(x) - x$.
3. Tracer l'allure de la courbe de f sur $\mathbb{R}_+$, puis donner, sans justifier, le comportement de la suite (u_n), en fonction de $u_0 \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 6. ★ On considère une suite (u_n) vérifiant

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k}.$$

1. Montrer que (u_n) est croissante à partir du rang 1.
2. Déterminer la limite de (u_n).
   Indication : *Considérer* $u_{n+1}^2 - u_n^2$.
3. Étudier la limite de $u_{n+1} - u_n$.
   Indication : *Exprimer* $u_{n+1} - u_n$ *en fonction de* u_n *uniquement.*
4. ★ En déduire un équivalent de u_n.

Exercice 7. ♣ **Suites de Cauchy**. On dit que (u_n) est de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geqslant N$, $|u_p - u_q| < \varepsilon$.

1. Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.
2. Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.
3. ★ Montrer que toute de Cauchy est convergente.
   Indication : *Montrer l'unicité d'une valeur d'adhérence de* (u_n).

Exercice 8. Soit (u_n) une suite non bornée. Montrer qu'elle admet une suite extraite (v_n) telle que $|v_n| \to +\infty$.

Exercice 9. ★ On considère une suite (u_n) vérifiant $u_{n+1} - u_n \to 0$ et $u_n \to +\infty$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. On suppose que $|u_{n+1} - u_n| \leqslant \varepsilon$ à partir du rang n_0. Soit $x \geqslant u_{n_0}$, montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $|u_p - x| \leqslant \varepsilon$.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $v_n \to +\infty$. Montrer que $\{u_n - v_m,\ n, m \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. En déduire que $\{u_n - \lfloor u_n \rfloor,\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0, 1]$.
   Indication : *On peut se contenter de montrer la densité dans* $]0, 1[$.
4. ★ Montrer que $\{\sin\big(\ln(n)\big),\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Exercice 10. ★

1. Étudier la convergence d'une suite (u_n) vérifiant $\forall n$, $u_n + \frac{1}{2}u_{n+1} = 1$.
   Indication : *Considérer* $\ell = \frac{2}{3}$ *et la suite* $u_{n+1} - \ell$.
2. Soit (u_n) une suite réelle bornée telle que $u_n + \frac{1}{2}u_{n+1} \to 1$. Montrer que (u_n) converge.
   Indication : *Considérer une valeur d'adhérence.*