Interro n°8

Exercice 1. Soit $A = (a_{ij})_{\substack{i\leqslant n\\ j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{ij})_{\substack{i\leqslant p\\ j\leqslant q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. On rappelle que l'on a $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$.

1. Quelles sont les dimensions de la matrice AB (nombre de lignes/colonnes) ? Donner l'expression du coefficient $(AB)_{ij}$ du produit des deux matrices.

On considère à présent $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $n = p = q$.

2. (a) À quelle condition sur les coefficients (a_{ij}) la matrice A est-elle triangulaire supérieure ?
   (b) Montrer que si A et B sont triangulaires supérieures, alors AB est triangulaire supérieure.
3. On suppose que $A = \mathrm{Diag}(d_1, \dots, d_n)$ est diagonale. En posant le produit matriciel, expliciter le produit DB.

Exercice 2. Soit X un ensemble muni d'une loi interne $\star$ associative. Un élément $x \in X$ est dit idempotent si $x \star x = x$.

1. Montrer que si x, y sont idempotents et commutent, alors $x \star y$ est idempotent.
2. Montrer que si x est idempotent et inversible alors x^{-1} est idempotent.

Exercice 3. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, calculer JX.
2. Calculer J^2 et J^3.
3. Énoncer le théorème du binôme de Newton, dans un anneau $(A, +, \times)$ quelconque.
4. Calculer, pour $n \geqslant 2$, M^n.

Exercice 4. On travaille dans le groupe $(\mathbb{Z}, +)$.

1. Soit $H \subset \mathbb{Z}$. À quelles conditions H est-il un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$?

Soit $\alpha \in \mathbb{Z}$. On pourra utiliser sans justifier que $\alpha\mathbb{Z} = \{\alpha k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

2. Montrer brièvement que si $H \subset (\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ et $\alpha \in H$, alors $\alpha\mathbb{Z} \subset H$.
3. On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des sous-groupes de $\mathbb{Z}$ qui contiennent α. Montrer que $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H = \alpha\mathbb{Z}$.

Exercice 5. Soit $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice inversible, et $\varphi \colon M_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad M \mapsto PMP^{-1}$. Montrer que φ est un morphisme d'anneaux.

Exercice 6. Soit $\varphi \colon G \to G'$ un morphisme de groupes. On note $\mathrm{Ker}\,\varphi = \varphi^{-1}(\{e'\})$, où e' est l'élément neutre de G', appelé noyau de φ. Montrer que $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est un sous-groupe de G.

Exercice 7. Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$.

1. On suppose que a, b sont premiers entre eux. Montrer que les ka pour $k \in [\![0, b-1]\!]\}$ forment un système complet de congruence modulo b, c'est-à-dire que pour tout $\ell \in [\![0, b-1]\!]$, il existe un (unique) $k \in [\![0, b-1]\!]$ tel que $ka \equiv \ell[b]$.
2. ★ Montrer que a et b sont premiers entre eux si et seulement si pour tout entier $n \geqslant (a-1)(b-1)$, il existe $(u, v) \in \mathbb{N}^2$ tel que $au + bv = n$.

Exercice 8. Soit $N = 4444^{4444}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $s(n)$ la somme des chiffres de n. Montrer que $n \equiv s(n)[9]$.
   Indication : *Écrire* $n = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k$.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de N par 9.
   Indication : *On pourra vérifier que pour tout* a *premier avec* 9*, on a* $a^6 \equiv 1[9]$.
3. ★ On note A la somme des chiffres de N, B la somme des chiffres de A et C la somme des chiffres de B. Que vaut C ?

Exercice 9. Soit $(G, \times)$ un groupe fini.

1. Pour $x \in G$, on note $Z(x) = \{g \in G \mid gx = xg\}$. Montrer que $Z(x)$ est un sous-groupe de G.

On rappelle que la relation $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G,\ y = gxg^{-1}$ est une relation d'équivalence sur G.

2. Soit $x \in G$. On note C_x la classe d'équivalence de x pour $\sim$.
   (a) Soit $\varphi \colon g \mapsto gxg^{-1}$. Montrer que $\varphi(g) = \varphi(g')$ si et seulement si $g^{-1}g' \in Z(x)$. Cela est équivalent à ce que $g' \in gZ(x) = \{gy,\ y \in Z(x)\}$.
   (b) En déduire que $|G| = |Z(x)| \times |C_x|$, où C_x est la classe d'équivalence de x.
3. ★ Soit p un nombre premier. Montrer que si G est de cardinal p^α, avec $\alpha \in \mathbb{N}^*$, alors $Z(G)$ est non trivial (différent de $\{e\}$).

Exercice 10. ★ Montrer que tout sous-groupe H de $(\mathbb{Z}, +)$ est de la forme $\alpha\mathbb{Z}$, pour $\alpha \in \mathbb{N}$.

Exercice 11. ★ ★ Soit A un anneau et $a, b \in A$. Montrer que si $\mathbb{1}_A - ab$ est inversible, alors $\mathbb{1}_A - ba$ l'est aussi.
Indication : *Conjecturer une relation entre les deux inverses, à l'aide de la relation formelle* « $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ ».