Interro n°9

Exercice 1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, avec $\cos\theta \neq \pm 1$. On admet que les racines de l'équation $X^2 - 2\cos\theta\ X + 1 = 0$ sont $e^{\pm i\theta}$.

1. Quelles sont les suites complexes, puis réelles vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} - 2\cos\theta u_{n+1} + u_n = 0$.
2. Quelles sont les solutions complexes, puis réelles de l'équation $y'' - 2\cos\theta y' + y = 0$?

Exercice 2. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $J_n = (\mathbf{1}_{i \equiv j+1[n]})_{i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où $\mathbf{1}_{i \equiv j+1[n]} = \begin{cases} 1 \text{ si } i \equiv j+1[n] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

1. Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, expliciter JX.
2. Calculer J^2 et J^3.
3. Pour $n \geqslant 2$, dessiner J_n. Sans justifier, donner l'expression de $J_n X$, pour $X \in \mathbb{R}^n$, de la matrice J_n^n, et d'une matrice K_n telle que $K_n J_n = I_n$.

Exercice 3. Soit $A = (a_{ij})_{\substack{i \leqslant n \\ j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{ij})_{\substack{i \leqslant p \\ j \leqslant q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

1. Quelles sont les dimensions de la matrice AB (nombre de lignes/colonnes) ? Donner l'expression du coefficient $(AB)_{ij}$ du produit des deux matrices.

On considère à présent $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $n = p = q$.

2. (a) À quelle condition sur les coefficients (a_{ij}) la matrice A est-elle triangulaire supérieure ?
   (b) Montrer que si A et B sont triangulaires supérieures, alors AB est triangulaire supérieure.

Exercice 4. Montrer que les solutions de $(E)\colon y'' - y = 0$ sont exactement les $t \mapsto \lambda \cosh t + \mu \sinh t$, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère l'équation différentielle $(E)\colon y'' - 2y' + y = f(t)$.

1. Résoudre l'équation homogène associée.
2. Déterminer une solution particulière de (E) dans les trois cas suivants :
   (a) $f(t) = 1$ (b) $f(t) = \cos 2t$ (c) $f(t) = (\cos t)^2$

Exercice 6. Déterminer les fonctions dérivables $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$, $y'(x) = y(-x)$.
Indication : *Justifier que y' est dérivable, puis dériver.*

Exercice 7. Soit $f\colon [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue.

1. Montrer que f admet un point fixe.
2. Montrer que si $K < 1$ et f est K-lipschitzienne, alors ce point fixe est unique et que toute suite (u_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ce point fixe.
3. On suppose qu'il existe $\omega \in [a,b]$ tel que toute suite (u_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ converge ω.
   (a) Montrer que ω est l'unique point fixe de f.
   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, ω est l'unique point fixe de $f^{(k)} = f \circ f \circ \cdots \circ f$.
   (c) ★ Montrer que $\{a,b\} \not\subset f([a,b])$.

Exercice 8.

1. Sans utiliser la syntaxe de tranche, écrire une fonction `est_prefixe` qui prend en argument deux chaînes de caractères `c1` et `c2` et qui renvoie `True` ssi `c1` est un préfixe de `c2`.
2. En utilisant la syntaxe de tranche, écrire une fonction `est_facteur` qui prend en argument `c1` et `c2` et renvoie `True` si et seulement si `c1` est un facteur (une sous-chaîne) de `c2`.
3. Écrire une fonction `split_space` qui prend en argument une chaîne de caractères `c` et renvoie une liste de chaînes de caractères, obtenues en découpant la chaîne `c` à chaque caractère espace `" "`.

```
assert split_space("ceci est un essai") == ["ceci", "est", "un", "essai"]
```

Exercice 9. On considère une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \arctan u_n$.

1. Montrer que (u_n) est monotone, et expliciter, en fonction de u_0, son sens de variation.
   Indication : *Commencer par étudier la position de* arctan *par rapport à la diagonale $y = x$.*
2. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 10.

1. Étudier la convergence d'une suite (u_n) vérifiant $\forall n$, $u_n + \frac{1}{2}u_{n+1} = 1$.
2. ★ Soit (u_n) une suite réelle bornée telle que $u_n + \frac{1}{2}u_{n+1} \to 1$. Montrer que (u_n) converge.
   Indication : *Considérer une valeur d'adhérence α de (u_n).*

Exercice 11. ★ Soit (u_n) définie par $0 < u_0, u_1 < 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{1}{2}\big(\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}\big)$.

1. Montrer que la suite $v_n = \min(u_{n+1}, u_n)$ converge.
2. Montrer que (u_n) converge, et déterminer sa limite.
   Indication : *Prendre $\varepsilon > 0$ que l'on choisira a posteriori, et considérer un rang à partir duquel $v_n \geqslant \ell - \varepsilon$.*

Exercice 12. ★ Soit $p \geqslant 2$. On considère $u_0, u_1 \in [\![0, p-1]\!]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit u_{n+2} comme le reste de la division euclidienne de $u_{n+1} + u_n$ par p. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique.
Indication : *Considérer les couples (u_n, u_{n+1}). Pourquoi la suite est-elle périodique à partir d'un certain rang ?*