Interro n°10

Traiter en priorité les exercices 1 à 7 et 9.1, 10.1, 11.1.

Exercice 1. Exprimer $\sin 3\theta$ et $\cos 3\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.
Indication : *Il s'agit de «délinéariser», en appliquant la formule de De Moivre.*
Exercice 2. Soient $M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3)$ trois points distincts du plan. Donner une CNS sur leurs affixes

1. pour qu'ils forment un triangle rectangle en M_2.
2. pour qu'ils forment un triangle isocèle en M_2.

Exercice 3. Soit $z \in \mathbb{U}$ tel que $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que $\ell \neq 0$.
2. Montrer que $z = 1$.

Exercice 4. Montrer que pour $z \in \mathbb{C}$, $|e^z| \leqslant e^{|z|}$. Cas d'égalité ?
Exercice 5. Factoriser le polynôme suivant sur $\mathbb{C}$. $z^4 - (1+i)z^3 + (i-1)z + 1$
Indication : *Trouver une première racine évidente, puis remarquer que i est racine. Terminer la factorisation en produit de facteurs de degré 1.*
Exercice 6. Calculer $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k \sin(k\theta)$
Exercice 7. Linéariser $\sin^4 x$
Exercice 8. Résoudre l'équation $z^4 = z + \overline{z}$
Indication : *Si z est solution, que peut valoir son argument ?*
Exercice 9.

1. Soit $u \in \mathbb{C}$. Donner une condition nécessaire et suffisante simple en termes de $\overline{u}$ pour que $u^2 \in \mathbb{R}$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{U}$ distincts et $z \in \mathbb{C}$. On pose $u = \frac{z+ab\overline{z}-a-b}{a-b}$. Montrer que $u^2 \in \mathbb{R}$.
   Indication : *Si $a \in \mathbb{U}$, que dire de $\overline{a}$?*

Exercice 10. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $n \geqslant 2$.

1. Montrer que l'équation $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \alpha$ admet au moins une solution.
2. Montrer que les complexes vérifiant $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \alpha$ sont tous réels si et seulement si $|\alpha| = 1$.
   Indication : *Il n'est pas nécessaire d'expliciter les solutions de l'équation.*

Exercice 11.

1. Exprimer la partie imaginaire de $(1+i)^{2n}$ comme une somme.
2. Calculer $\sum\limits_{0\leqslant 2k\leqslant n}(-1)^k\binom{n}{2k}$.
   Indication : *On pourra affirmer une égalité entre cette somme et une autre quantité sans justifier.*

Exercice 12. Soit $n \geqslant 2$. Calculer $T = \sum\limits_{\omega\in\mathbb{U}_n\setminus\{1\}} \frac{1}{1-\omega}$.
Indication : *Que dire de $\overline{T}$?*
Exercice 13. ★ Soient $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}^*$. Montrer qu'il existe une partie $I \subset [\![1, n]\!]$ telle que

$$\Big|\sum_{k\in I} z_k\Big| \geqslant \frac{1}{4\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{n}|z_k|.$$

Indication : *Partitionner le plan en quatre quadrants.*
Exercice 14. ★ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $C_n = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^* \mid x^2 + y^2 = n\}$.

1. Montrer que C_1 est non vide.
2. Montrer que C_7 est vide.
   Indication : *Descente infinie.*
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que C_n est non vide. Montrer que C_n est infini.
   Indication : *En partant d'un point (x, y) de C_n, considérer, pour $t \in \mathbb{Q}$, les intersections de $\mathcal{C}$ avec la droite passant par (x, y) de pente t.*