

Interro n°10

Exercice 1. Soit (G, \times) un groupe de neutre e_G . Montrer que si H_1, H_2 sont deux sous-groupes de G , $H_1 \cap H_2$ est un sous-groupe de G .

Exercice 2. Soit X un ensemble muni d'une loi interne \star associative. Un élément $x \in X$ est dit idempotent si $x \star x = x$.

1. Montrer que si x, y sont idempotents et commutent, alors $x \star y$ est idempotent.
2. Que dire d'un élément $x \in X$ idempotent et inversible ?
3. **★ ★** On suppose que X est fini, (et n'admet pas forcément d'élément neutre) montrer qu'il existe un élément idempotent. **Indication :** *Considérer une suite $x_{n+1} = x_n^{\star 2}$.*

Exercice 3. On considère $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{Z})$ et le système linéaire homogène (H) : $AX = \vec{0}_{\mathbb{R}^n}$.

1. Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ résoudre le système $AX = \vec{0}_{\mathbb{R}^3}$.
2. On suppose que $p > n$. Justifier qu'il existe une solution non nulle $X \in \mathbb{Q}^p$, puis une solution non nulle $X \in \mathbb{Z}^p$.

Exercice 4. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

1. Calculer M^2 . Donner, sans justifier, une expression de M^k , pour $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Quel est le rang de M ? Est-elle inversible ?
3. Soit $D = \text{Diag}(d_1, \dots, d_n)$ une matrice diagonale, de coefficients diagonaux d_1, \dots, d_n non nuls. Calculer $B = DMD^{-1}$ et B^2 . La matrice B est-elle inversible ?
4. Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer une expression, pour $k \in \mathbb{N}^*$, de C^k .

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $A^3 + aA^2 + bA = cI_3$. En déduire que A est inversible,

et une expression de A^{-1} .

Indication : On a $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6.

1. Soit $H \subset \mathbb{Z}$. À quelles conditions H est-il un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$?
2. Montrer que tout sous-groupe L de $(\mathbb{Z}, +)$ est de la forme $\alpha\mathbb{Z}$, pour $\alpha \in \mathbb{Z}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et H un sous-groupe de (\mathbb{U}_n, \times) . On considère $L = \{k \in \mathbb{Z} \mid e^{\frac{2ik\pi}{n}} \in H\}$.
 - (a) Montrer que L est un sous-groupe de \mathbb{Z} .
 - (b) En déduire qu'il existe un diviseur d de n tel que $H = \mathbb{U}_d$.

Exercice 7.

1. Pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, justifier que $I_n + E_{ij}$ est inversible.
2. Quelles sont les matrices qui commutent avec toutes les matrices inversibles ?
Indication : On pourra admettre un résultat vu en TD, énoncé clairement.

Exercice 8. Pour quelles valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$ le système linéaire suivant admet-il des solutions ?

$$\begin{cases} x + y + 2z = a \\ x + z = b \\ 2x + y + 3z = c \end{cases}.$$

Exercice 9.

Calculer l'inverse.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 10.

1. Écrire une fonction `est_facteur_pos` qui prend en argument deux chaînes de caractères `m` et `t` et un indice `i` et renvoie `True` si `m` est une sous-chaîne de `t` à l'indice `i`, c'est-à-dire si `m[0] == t[i]`, `m[1] == t[i+1]`, etc.
2. Écrire une fonction `est_facteur` qui prend en argument deux chaînes de caractères `m` et `t` et qui renvoie `True` si `m` est une sous-chaîne de `t`. Quel est, dans le pire des cas, le nombre de comparaisons effectuées, en fonction des longueurs de `t` et `m` ?
3. Écrire une fonction `table_long_match` qui prend en argument `m` et `t` et renvoie une liste `l` de même longueur que `t` telle que `l[i]` soit la longueur du plus long préfixe de `m` qui soit facteur de `t` à la position `i`.

4. ★ Écrire une fonction `est_presque_facteur` qui prend en argument `m` et `t` et renvoie `True/False` selon si le texte `t` contient un facteur qui est égal à `m` privé d'un caractère (à une position quelconque).

On veut une implémentation qui réalise au plus 2 fois plus d'opérations que la recherche usuelle d'un motif.

Exercice 11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure, avec une diagonale nulle.

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i + (k - 1) \geq j \Rightarrow (A^k)_{ij} = 0$.
2. Conclusion ?

Exercice 12. ★ Si $P = \sum_{k=0}^d b_k X^k$ est un polynôme réel et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note $P(A) = \sum_{k=0}^d b_k A^k$, appelé polynôme en A . Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un polynôme P non nul de degré $\leq n^2$ tel que $P(A) = O_n$.

Indication : *Se ramener à la résolution d'un système linéaire.*