Interro n°11

Exercice 1.

1. Énoncer le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.
2. Démontrer l'unicité.

Exercice 2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré n, que l'on peut écrire $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

1. Quel est le coefficient dominant de $P(2X)$? En déduire quels sont les polynômes vérifiant $2P(X) = P(2X)$.
2. Si $n \geqslant 1$, quel est le coefficient de degré $n-1$ de $P(X+1)$? En déduire quels sont les polynômes vérifiant $P(X) = P(X+1)$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $X^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega)$. **Indication** : *Quelles sont les racines de $X^n - 1$?*
2. Expliciter un polynôme (donner ses coefficients) dont l'ensemble des racines est $\mathbb{U}_n \backslash \{1\}$. **Indication** : *«diviser» $X^n - 1$ par $X - 1$.*
3. En déduire la valeur de $\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n \backslash \{1\}} (1 - \omega)$.

Exercice 4. Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$.

1. On suppose que a, b sont premiers entre eux. Montrer que a est inversible modulo b, c'est-à-dire qu'il existe $c \in \mathbb{N}$ tel que $ac \equiv 1[b]$.
2. On suppose que a, b sont premiers entre eux. Montrer que les ka pour $k \in [\![0, b-1]\!]\}$ forment un système complet de congruence modulo b, c'est-à-dire que pour tout $\ell \in [\![0, b-1]\!]$, il existe un (unique) $k \in [\![0, b-1]\!]$ tel que $ka \equiv \ell[b]$. **Indication** : *Si $ka = \ell a$, qu'obtient-on ?*
3. ★ Montrer que a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, il existe $(u, v) \in \mathbb{N}^2$ tel que $au + bv = n$.

Exercice 5.

1. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ deux polynômes. Donner l'expression du coefficient de degré k de PQ, noté $c_k(PQ)$.
2. En considérant le coefficient de degré n du produit $(X+1)^n (X+1)^n$, simplifier la somme $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 6. Soit $A = \{\frac{n}{2m+1} \,;\, n, m \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.
2. Décrire sans justifier les éléments inversibles de A.

Exercice 7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $P \in \mathbb{R}[X]$, on considère (E_n): $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $z^n + \frac{1}{z^n} = P(z + \frac{1}{z})$.

1. Déterminer des polynômes P_1 et P_2 vérifiant respectivement (E_1) et (E_2).
2. Montrer que pour $n \geqslant 1$, il existe au plus un polynôme P vérifiant (E_n).
   Indication : *On montre que si on en prend deux, la différence est le polynôme nul.*
3. On donne la relation $\forall n \geqslant 1$, $z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}} = (z + \frac{1}{z})(z^n + \frac{1}{z^n}) - (z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}})$. En déduire une relation de récurrence d'ordre 2 définissant une suite (P_n) de polynômes tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n vérifie (E_n).

Exercice 8.

1. Quel est le chiffre des unités de 2023^{2023} ?
2. Quel est le chiffre des unités de $2023^{2023^{2023}}$?

Exercice 9.

1. Écrire une fonction `est_triée` qui prend en argument une liste et renvoie `True` si elle est triée par ordre croissant.
2. Implémenter une fonction `tri` qui prend en argument une liste, et la modifie pour qu'elle soit triée.
3. Écrire une fonction `occurrences` qui prend en argument une liste triée, et renvoie une liste de couples =(a, occ)= où les `a` sont les éléments distincts de la liste, et `occ` est le nombre d'occurrence de `a` dans la liste.
   `assert occurrences([1,1,2,3,3,3]) == [(1,2), (2, 1), (3,3)]`.
4. ★ Écrire une fonction `k_plus_communs` qui prend en argument `k` et une liste `l` et renvoie la liste des `k` éléments de `l` qui apparaissent le plus souvent.
   Indication : *La fonction `tri` précédente fonctionne pour une liste de couples, suivant l'ordre lexicographique.*

Exercice 10. Soit $(G, \times)$ un groupe fini.

1. Pour $x \in G$, on note $Z(x) = \{g \in G \mid gx = xg\}$. Montrer que $Z(x)$ est un sous-groupe de G.

> On rappelle que la relation $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G,\, y = gxg^{-1}$ est une relation d'équivalence sur G.

2. Soit $x \in G$. On note C_x la classe d'équivalence de x pour $\sim$.
   (a) Soit $\varphi\colon g \mapsto gxg^{-1}$. Montrer que $\varphi(g) = \varphi(g')$ si et seulement si $g^{-1}g' \in Z(x)$.
   C'est équivalent à ce que $g' \in gZ(x) = \{gy,\, y \in Z(x)\}$.
   (b) En déduire que $|G| = |Z(x)| \times |C_x|$.

Exercice 11. ★ Montrer que $\{2^a 3^b,\ a, b \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 12. ★ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 2$. Montrer que P^2 à au moins trois coefficients positifs (ou nuls).
Indication : *Traiter le cas où $a_0 = 1$. Raisonner par l'absurde.*