Interro n°12

En priorité : jusqu'au 9.

Exercice 1. Soit f une fonction réelle et $x_0, \ell \in \mathbb{R}$. Donner les définitions formelles de

1. $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$
2. $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$

Exercice 2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$, par

$$f : x \mapsto \begin{cases} (x-1)e^x \text{ si } x \geqslant 1 \\ \ln x \text{ si } 0 < x < 1 \end{cases}.$$

Montrer que f est continue.

Exercice 3. Soit $x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$ distincts.

1. Rappeler l'expression des polynômes d'interpolation de Lagrange $L_1, \dots, L_{n+1}$.
2. Que dire de $L_j(x_i)$? Montrer que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $P = \sum_{i=1}^{n+1} P(x_i)L_i$.
3. ★ Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$, alors P est à coefficients rationnels.

Exercice 4. Soit $P = aX^{n+1} + bX^n + 1$. À quelle CNS sur $a, b \in \mathbb{C}$ est-ce que

1. $(X-1)$ divise P ?
2. $(X-1)^2$ divise P ?

Exercice 5. On donne $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$. On considère $P = X^5 + 1$.

1. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Factoriser P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 6.

1. Énoncer la formule de Taylor.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $P(a) > 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P^{(k)}(a) \geqslant 0$. Montrer que P n'admet aucune racine dans $[a,+\infty[$.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Expliciter un polynôme dont l'ensemble des racines est $\mathbb{U}_n \backslash \{1\}$.
   Indication : *Partir d'un polynôme dont l'ensemble des racines est $\mathbb{U}_n$.*
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n \backslash \{1\}} (1-\omega)$.

Exercice 8. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $\geqslant 1$. Montrer que l'application $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto P(z)$ est surjective.

Exercice 9. **Sommes de Newton**. Soit $P(x) = x^3 - 3x - 1$.

1. Justifier brièvement que P admet exactement trois racines réelles α, β, γ, c'est-à-dire que P s'annule trois fois.
   Indication : *Considérer des valeurs particulières de P, comme $P(0)$, $P(-1)$, ...*
2. Calculer $S_1 = \alpha + \beta + \gamma$, $\alpha\beta\gamma$, puis $S_2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.
   Indication : *Que vaut $\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma$?*
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$. Montrer que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence d'ordre 3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n \in \mathbb{Z}$.
   Indication : *Écrire/utiliser que $P(\alpha) = 0$ et en déduire une relation entre des puissances successives de α^n.*

Exercice 10. Soit $n \geqslant 1$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(k) = \frac{1}{k}$. Montrer que $\deg P \geqslant n-1$.
Indication : *À partir de P, construire un polynôme qui a n racines.*

Exercice 11. Soit P un polynôme réel unitaire de degré n. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geqslant |\operatorname{Im} z|^n$.

Exercice 12. ★ **Racines de polynômes à coefficients** $-1, 0, 1$. On note E l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$ et A l'ensemble des racines réelles non nulles des polynômes non nuls de E.

1. Examiner A quant aux transformations $x \mapsto -x$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$.
2. Montrer que $A \subset [-2,2]$.

Exercice 13. ★ **Théorème de Kronecker**. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. On note $\mathcal{P}_n^U$ l'ensemble des polynômes unitaires de degré n à coefficients entiers à dont les racines complexes sont toutes de module 1. Montrer que $\mathcal{P}_n^U$ est fini.
   On admet que si $P \in \mathbb{Z}[X]$ est unitaire de degré n, de racines $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, alors $\alpha_1^2, \dots, \alpha_n^2$ sont racines d'un autre polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$ de degré n.
2. ★ ★ Montrer que si $P \in \mathcal{P}_n^U$, les racines de P sont des racines de l'unité.