Interro n°13

Exercice 1. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$. Montrer que $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
2. Si $f(0) = 1$ et f est continue en 0, montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in [-\delta, \delta]$, $f(x) > 0$.

Exercice 2.

1. Donner la définition de l'uniforme continuité d'une fonction.
2. Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, 2]$, puis sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 3. Donner des équivalents (justifier) en 0 et en $+\infty$ de

1. $f(x) = \frac{x^2+2x^3}{1+x+x^2}$.
2. $g(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$ **Indication** : *Quantité conjuguée*

Exercice 4. Soit $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continues telles que $f(0) > g(0)$ et $f(1) < g(1)$. Montrer qu'il existe c tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 5. Trouver toutes les applications $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f(x))^2 = x^2 + 1$.

Exercice 6. Soient $(u_n), (v_n)$ des suites qui ne s'annulent pas.

1. Donner la définition de $u_n = o_{+\infty}(v_n)$ et $u_n \sim_{+\infty} v_n$.
2. Montrer que $e^{u_n} \sim e^{v_n} \Leftrightarrow u_n - v_n = o_{+\infty}(1)$.
3. ★ On suppose $u_n = o(v_n)$ et $u_n, v_n \geqslant 0$. Montrer qu'il existe une suite (w_n) telle que $u_n = o(w_n)$ et $w_n = o(v_n)$.

Exercice 7.

1. Si `l` est une liste de longueur n, quelle est la complexité des algorithmes de tri de la librairie `Python` ? Si `l` est triée, quelle est la complexité d'une recherche dichotomique dans `l` ?
2. Écrire une fonction `recherche_dichotomique` qui prend en argument une liste triée `l` et un élément `e` et qui décide si l'élément appartient à la liste. **Indication** : *Poser* `a=0, b = len(l)-1`.

Exercice 8. Déterminer les limites suivantes $(x-1)\ln(x^2-1)$ en 1^+

Indication : *Pour une limite en 1, il ne faut pas chercher à factoriser par x, mais par $x - 1$.*

Exercice 9. On note $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. On considère la fonction $f\colon I \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x(1-4x^2)$.

1. Étudier les variations de f et tracer l'allure de son graphe.
2. Justifier brièvement qu'il existe une unique fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui soit 1-périodique et dont la restriction à I vérifie $g_{|I} = f$.
3. Montrer que g est continue.

Exercice 10. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x) \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow[-\infty]{} +\infty$. Montrer que f admet un minimum.

Exercice 11. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.

Exercice 12. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante positive et $c > 1$ tel que $\frac{f(cx)}{f(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$. Montrer que pour tout $d > 1$, $\frac{f(dx)}{f(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$. **Indication** : *Commencer par traiter le cas $1 < d \leqslant c$.*

Exercice 13. Théorème des cordes universelles. Soit $n \geqslant 2$ et $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(0) = f(1)$. On note A l'ensemble des $a \in [0,1]$ pour lesquels il existe $x \in [0, 1-a]$ tel que $f(x+a) = f(x)$.

1) Expliciter sans justifier A pour $f : x \mapsto \sin(2\pi x)$.

2) On suppose que $f(0) = f(1) = 0$ et que $\forall x \in]0,1[$, $f(x) > 0$. Montrer que $A = [0, 1]$.

3) Montrer que dans le cas général, il existe $c > 0$ tel que $[0, c] \subset A$.

Exercice 14. ★ Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{U}$ un morphisme continu. Une fonction $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{i\tilde{f}(x)}$ est appelé un relèvement de f.

1. Montrer si $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$ sont deux relèvements continus alors $\tilde{f}_1 - \tilde{f}_2$ est constante.

> On admet que pour $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, si $|\theta - \theta'| \leqslant \pi$, alors $|e^{i\theta} - e^{i\theta}| \geqslant \frac{2}{\pi}|\theta - \theta'|$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et un relèvement continu $\tilde{f}$ de f défini sur $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$.

3. ★ Montrer qu'il existe un unique relèvement continu $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie $\tilde{f}(0) = 0$.
Indication : *Considérer l'ensemble des x pour lesquels il existe un tel relèvement défini sur $[-x, x]$.*

4. Montrer que $\tilde{f}$ est un morphisme de groupe.
Indication : *Utiliser l'unicité.*

5. En déduire quels sont les morphismes de groupes continus $\mathbb{R} \to \mathbb{U}$.

Exercice 15. ★ Soit $f\colon]0,1] \to \mathbb{R}$ uniformément continue.

1. Montrer que f est bornée.

2. ★ Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0. **Indication** : *Caractérisation séquentielle.*