Interro n°13

Le 15.1 est une question de cours.

Exercice 1. Soit $f\colon x \mapsto xe^{\frac{1}{x^2}}$.

1. Justifier que f est continue.
2. La fonction f admet-elle un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2. Soit $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continues telles que $f(0) > g(0)$ et $f(1) < g(1)$. Montrer qu'il existe c tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 3. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$. Montrer que $f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

Exercice 4. Déterminer la limite éventuelle de

1. $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}$ en 1
2. $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ en 1
3. $(x-1)\ln(x^2-1)$ en 1^+

Exercice 5. Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) < 0$ et $f(1) > 1$. On note $A = \{x \in [0,1] \mid f(x) \leqslant 0\}$ et $\alpha = \sup A$.

1. Montrer que $f(\alpha) \leqslant 0$.
2. Montrer que $f(\alpha) \geqslant 0$.

Exercice 6. Montrer qu'il existe une fonction continue $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $2f(x) + \sin f(x) = x$.
Indication : *Une certaine fonction est bijective...*

Exercice 7. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.

Exercice 8. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x) \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow[-\infty]{} +\infty$. Montrer que f admet un minimum.

Exercice 9. Soit $f\colon x \mapsto \sin \frac{1}{x}$, et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f n'est pas continue en 0.
2. Montrer que pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$, $f(I)$ est un intervalle.
   Indication : *Dans le cas où I contient 0, on pourra annoncer un résultat sans le justifier.*

Exercice 10. Existe-t-il une application continue

1. bijective $[0,1[\to]0,1]$?
2. bijective $]0,1[\to [0,1]$?

Exercice 11. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique et continue. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(\mathbb{R}) = f\big([a, a + \frac{T}{2}]\big)$.

Exercice 12. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante positive et $c > 1$ tel que $\frac{f(cx)}{f(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$.

1. Montrer que pour tout $d > 1$, $\frac{f(dx)}{f(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$.
   Indication : *Commencer par traiter le cas $1 < d \leqslant c$.*
2. Qu'en est-il pour $d < 1$?

Exercice 13. ★ Soient f, g continues sur $[0,1]$.

1. Justifier la définition de
$$\varphi\colon x \mapsto \sup_{t\in[0,1]} \big(f(t) + xg(t)\big).$$
2. Montrer que φ est lipschitzienne.

Exercice 14. ★ Soit $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $x > 0$, $\big(f(nx)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ soit croissante.

1. Montrer que f est croissante.
2. Et si f n'est pas continue ?

Exercice 15. ★ Soit $f\colon]0,1] \to \mathbb{R}$ uniformément continue.

1. Rappeler la définition formelle de f uniformément continue.
2. Montrer que f est bornée.
3. ★ Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0.
   Indication : *Caractérisation séquentielle.*

Exercice 16. ★ Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. ★ Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de $\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t$.
Indication : *Découper l'intégrale en deux, au niveau de $1-\varepsilon$. On utilisera le fait que la fonction f est bornée, et la continuité de f en 0, pour majorer uniformément (indépendamment de t) la quantité $f(t^n)$.*