Interro n°14

Écrire les DL du cours que vous utilisez. En priorité : jusqu'au 10.1.

Exercice 1.

1. Rappeler un $DL_4(0)$ de e^x.
2. Donner un $DL_4(0)$ de $\cosh x$.

Exercice 2. Déterminer le $DL_3(0)$ de $\frac{1+x}{1-x}$

Exercice 3. $DL_7(0)$ de $x \sin(x^2)$

Exercice 4. $DL_2(0)$ de $e^x(\cos x + x)$

Exercice 5.

1. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Donner un DL à l'ordre 1 de f en 0, et un DL à l'ordre 1 de f en un point $a \in \mathbb{R}$ quelconque.
2. Donner le DL à l'ordre 1 de arctan en 0, puis un équivalent de $\arctan x$ en 0.
3. Déterminer la limite de $\frac{\arctan(x^2)}{\sin(x+x^2)}$ en 0.

Exercice 6. Déterminer le

1. $DL_3(0)$ de $e^{x \cos x}$
2. $DL_2(0)$ de $\ln\big(1 + \ln(1+x)\big)$

Exercice 7.

1. Compléter le $DL_2(0)$: $(1+x)^\alpha = \ldots + \ldots x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o_0(x^2)$.
2. En déduire un développement asymptotique à trois termes : $\frac{1}{(n+1)^{1/3}} = \frac{1}{n^{1/3}} + \cdots + \cdots + o_{n\to+\infty}\big(\ldots\big)$.

Exercice 8. Déterminer la limite de $\left(\frac{e^{ax}+e^{bx}}{2}\right)^{1/x}$ en 0.

Indication : *Effectuer un $DL_1(0)$.*

Exercice 9. Donner un équivalent simple de chaque sommande, puis de la somme $u_n = \frac{2n+1}{\ln(2n+1)} - \frac{n}{\ln(n+1)} + \sqrt{2n+1}$. Justifier brièvement.

Exercice 10. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. On suppose que f admet un développement limité $f(x) = a_p x^p + a_{p+1}x^{p+1} + \cdots + a_n x^n + o_0(x^n)$, avec $a_p \neq 0$. Donner un équivalent de $f(x)$ en 0, justifier brièvement.
2. Montrer l'unicité d'un $DL_n(0)$ de f, c'est-à-dire que si $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o_0(x^n)$ et $f(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o_0(x^n)$, alors $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $a_k = b_k$.
3. Montrer que si f est paire et $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o_0(x^n)$, alors nécessairement les coefficients de degré impair sont nuls.

Exercice 11. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant $f(x) = o_0(x^n)$. On considère $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $F(x) = o_0(x^{n+1})$.

Exercice 12. ★ Donner le $DL_{10}(0)$ de $\ln\left(\sum_{k=0}^{9} \frac{x^k}{k!}\right)$.

Exercice 13. ★ On note $\mathcal{P}(x)$ l'ensemble des entiers $n \leqslant x$ qui sont des puissances parfaites, c'est-à-dire qui s'écrivent a^n, pour $a \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$. On note $\mathcal{P}_2(x)$ l'ensemble des entiers $\leqslant x$ sommes de deux puissances parfaites, et on note $\mathcal{P}_2^*(x)$ l'ensemble des entiers $\leqslant x$ qui peuvent s'écrire $a^n + b^m$, avec $a, b \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et $m \geqslant 3$.

1. Montrer que $\big|\mathcal{P}(x)\big| = O(\sqrt{x}\ln x)$, puis que $\big|\mathcal{P}_2^*(x)\big| = O(x^{\frac{5}{6}}(\ln x)^2)$.
2. En déduire que $\big|\mathcal{P}_2(x)\big| \leqslant \frac{3}{4}x + o(x)$.

Une étude fine des nombres s'écrivant comme sommes de deux carrés permet de montrer que $\big|\mathcal{P}_2(x)\big| = o(x)$.