Interro n°15

L'exercice 8 est facile ; Les questions 9.1 et 10.1 sont des questions de cours.

Exercice 1. Soit $a < b$ et $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

1. Énoncer le théorème de Rolle.
2. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$, que $f(a) = f(b) = 0$ et que $f'(a) = 0$. Montrer que $f^{(2)}$ s'annule sur $]a,b[$.

Exercice 2. Dérivabilité de $f\colon x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$.

Exercice 3. Soit f dérivable telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + x^2 f(x) = e^{3x}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Quand $x \to 1$, déterminer la limite, puis un développement limité à deux termes, de $\frac{x^\alpha - 1}{x-1}$.

Exercice 5.

1. Énoncer la formule de Leibniz.
2. Soit $f(x) = (x-a)^n(x-b)^n$. Déterminer une expression de la dérivée n-ième de f comme une somme.

Exercice 6. On considère les fonctions $h\colon x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ et $f\colon x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ h(x) \text{ si } x > 0 \end{cases}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme réel P_n tel que $\forall x \neq 0,\ h^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$ tel que $h^{(n)}(x) \sim_{x \to 0^+} C x^k e^{-\frac{1}{x}}$. En déduire sa limite, quand $x \to 0^+$.

Exercice 7. Soit $f\colon x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$

1. Déterminer un $DL_1(0)$ de f.
2. Montrer que f peut être prolongée en une fonction continue, puis que ce prolongement est dérivable.
3. Montrer que le prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$.
4. Étudier la position de la courbe de f par rapport à sa tangente au voisinage de 0.

Exercice 8. Soit $f\colon x \mapsto \sqrt{\sin x} + x$, définie sur $[0,\pi]$.

1. Sur quel intervalle les théorèmes d'opérations permettent-ils de conclure que la fonction f est dérivable ?
2. Montrer que f réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle J à préciser, de réciproque f^{-1} continue.
3. ★ Montrer que f^{-1} est dérivable sur J.
   Indication : *Une partie présente une difficulté. Déterminer un équivalent de* $f^{-1}(x)$.

Exercice 9. Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $f(1) \neq 0$. On considère $I_n = \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Écrire une IPP.
2. Montrer que $I_n \sim \frac{f(1)}{n}$.
3. ★ ★ Même chose sous l'hypothèse f uniquement $\mathcal{C}^0$.
   Indication : *Poser* $g = f - f(1)$ *et montrer que* $\int_0^1 t^n g(t)\,\mathrm{d}t = o(1/n)$. *Pour cela, fixer* $\varepsilon > 0$, *puis pour* $A \in \mathbb{R}_+$ *à choisir judicieusement par la suite, découper l'intégrale en* $1 - \frac{A}{n}$.

Exercice 10.

1. Développement asymptotique à une précision en $o\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^3\right)$ de $\sqrt[n]{n}$.
2. Montrer que $\frac{\ln(n+1)}{n+1} = \frac{\ln n}{n} - \frac{\ln n}{n^2} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{(\ln n)^3}{n^3}\right)$.
3. Équivalent de $\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}$.

Exercice 11. Soit $n \geqslant 2$. On considère l'équation $(E_n)\colon \sin x = \frac{x}{n}$.

1. Montrer que (E_n) admet une unique solution x_n dans l'intervalle $]0,\pi[$.
2. Étudier la monotonie de $(x_n)_{n \geqslant 2}$ et sa convergence.
3. Montrer que $x_n = \pi - \frac{\pi}{n} + o(\frac{1}{n})$
4. Donner un développement asymptotique de x_n à la précision $o(\frac{1}{n^3})$.

Exercice 12. ★ Soit $n \geqslant 1$, f une fonction n fois dérivable et $g(x) = x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)$. Montrer que $g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$.