Interro n°15

En priorité : → 10.3.

Exercice 1. Soit f une fonction définie sur un voisinage de 0. On suppose f dérivable en 0. Déterminer la limite de $\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ quand $x \to 0$.

Exercice 2.

1. Énoncer le théorème de la limite de la dérivée.
2. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a,b]$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième $f^{(n)}$ admet une limite finie en a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a,b]$.

Exercice 3.

1. Démontrer le théorème de Rolle pour $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, avec $a < b$.
2. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Montrer que si f s'annule en n points distincts ($n \geqslant 2$), alors f' s'annule au moins $n-1$ fois.
3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que P' est également scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Soit $f\colon x \mapsto \sqrt{\sin x} + x$, définie sur $[0, \pi/2]$.

1. Étudier la dérivabilité de f.
2. Montrer que f réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle J à préciser, de réciproque f^{-1} continue.
3. Montrer que f^{-1} est dérivable sur J.
   Indication : *Une partie présente une difficulté. Déterminer un équivalent de* $f^{-1}(x)$.

Exercice 5. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Donner la définition d'une fonction convexe $f\colon I \to \mathbb{R}$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = |t+a|$ est convexe.
   Indication : $a = ta + (1-t)a$.

Exercice 6. Soit $f\colon x \mapsto \frac{x}{e^x-1}$

1. Déterminer un $DL_1(0)$ de f.
2. Montrer que f peut être prolongée en une fonction continue, puis que ce prolongement est dérivable.
3. Montrer que le prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 7.

1. Énoncer la formule des accroissements finis.
2. Déterminer un équivalent, en $+\infty$, de $\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}$.

Exercice 8. Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$, avec $\ell > 0$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$.

Exercice 9.

1. Écrire une fonction récursive `factorielle` qui renvoie $n!$.
2. Tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ s'écrit, de manière unique, comme $n = 2^p m$, où $p \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$ est impair.
   Écrire une fonction récursive `decomposition` qui prend en argument n et renvoie le couple (p, m).
3. ★ Écrire une fonction qui prend en argument n et renvoie l'exposant p tel que $n! = 2^p m$, avec une complexité en $O(\ln n)$.

Exercice 10. Soit $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{1+x^2} \end{array}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$.
2. Énoncer la formule de Leibniz.
3. Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R},\ (1+x^2)f'(x) = -2xf(x)$. En déduire que $P_{n+1} + 2X(n+1)P_n + n(n+1)(1+X^2)P_{n-1} = 0_{\mathbb{R}[X]}$.
4. Quelles sont les limites de $f^{(n)}(x)$ en $\pm\infty$? En déduire que P_n est scindé à racines simples.

Exercice 11. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$ et on pose $M_0 = \sup|f|$ et $M_2 = \sup|f''|$.

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\quad (*)\colon f'(t) \geqslant f'(x_0) - M_2|t - x_0|$.
2. On suppose que $f'(x_0) > 0$. En intégrant $(*)$ sur un segment $[a,b]$ bien choisi, montrer que $f'(x_0)^2 \leqslant 2M_0M_2$.
3. Conclure que $\sup|f'| \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$.

Exercice 12. ★ Soit $n \geqslant 1$, f une fonction n fois dérivable et $g(x) = x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)$. Montrer que $g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 13. ★ Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable avec $a < b$. On suppose que $f'(a) = f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que la tangente au graphe de f en c passe par le point $(a, f(a))$.

Indication : *Expliquer comment se ramener au cas où* $a = 0$ *et* $f(a) = 0$. *Faire un dessin et expliquer la pertinence de* $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.