Interro n°16

En priorité : jusqu'au 10.1, et éventuellement 11.1.

Exercice 1.

1. Énoncer la formule des accroissements finis.
2. Soit $f(x) = x^{1/x}$. Déterminer un équivalent, quand $x \to +\infty$, de $f'(x)$. En déduire un équivalent, en $+\infty$, de $\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}$.

Exercice 2.

1. Énoncer le théorème de la limite de la dérivée au point a, pour $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.
2. Le démontrer.

Exercice 3. On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$(H)\colon \quad 2xy' - 3y = 0 \quad \text{et} \quad (E)\colon \quad 2xy' - 3y = \sqrt{x}.$$

1. Résoudre (H), puis (E) sur $]0,+\infty[$.
2. L'équation (E) admet-elle des solutions sur $[0,+\infty[$?

Exercice 4. Résoudre les équations différentielles suivantes : $y' \ln x + \frac{y}{x} = \ln x$ sur $]1,+\infty[$

Exercice 5. Soit y une solution de $(E)\colon x^2y'' - 2y = x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Trouver, puis résoudre une équation différentielle vérifiée par $z(t) = y(e^t)$.
2. Résoudre (E).

Exercice 6. Déterminer toutes les fonctions $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continues telles que $\forall x \in [0,1],\ f(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + 1$.
Indication : *Se ramener à une équation différentielle d'ordre 1.*

Exercice 7.

1. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que, en $+\infty$, si $f'(x) \to +\infty$, alors $f(x) \to +\infty$.
   Indication : *IAF*
2. Existe-t-il une fonction bornée, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant $y' + y = \ln x$?

Exercice 8. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction dérivable telle que $f(x) \xrightarrow[-\infty]{} 0$, $f(x) \xrightarrow[+\infty]{} 0$ et $f(0) > 0$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 9. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, et g définie par $g(x) = f'(x) - f(x)\sin x$.

1. Si f est paire, que dire de la parité de g ?
2. Donner une expression intégrale des solutions de l'équation $y' - y\sin x = g$.
3. Étudier la réciproque de la première question.

Exercice 10. Soit $f\colon x \mapsto \arctan x$.

1. Justifier brièvement que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
   On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n-1$ tel que $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, P_n est scindé à racines simples.
   Indication : *Procéder par récurrence.*

Exercice 11. Soient $a, b\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ des fonctions vérifiant $\forall x \geqslant 0,\ b(x) < 0$. On considère $y\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) > 0$ et $y'' + ay' + by \geqslant 0$.

1. Soit f une fonction dérivable. On suppose que $f(x_0) = 0$ et que $\forall x \leqslant x_0,\ f(x) \geqslant 0$. Montrer que $f'(x_0) \leqslant 0$.
2. On veut montrer que $\forall x > 0,\ y(x) > 0$. On raisonne par l'absurde et on suppose que y s'annule en un point $x_2 > 0$.
   (a) Montrer que y admet un plus petit zéro strictement positif.
   (b) ★ Aboutir à une contradiction.

Exercice 12. ★ Lemme de Grönwall. Soient f, g continues, g positive, $A \geqslant 0$ tels que

$$\forall x \geqslant 0,\ f(x) \leqslant A + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

En considérant la fonction $\varphi\colon x \mapsto A + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, montrer que

$$\forall x \geqslant 0,\ f(x) \leqslant Ae^{\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Exercice 13. ★ Soient I un intervalle ouvert, $f\colon I \to \mathbb{R}$ dérivable et $[a,b] \subset I$ avec $a < b$. On suppose que $f'(a) = f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que la tangente au graphe de f en c passe par le point $(a, f(a))$.
Indication : *Se ramener au cas où $a = 0$ et $f(a) = 0$. À l'aide d'un dessin, introduire une fonction judicieuse. Distinguer plusieurs cas.*