Interro n°16

Exercice 1. Pour $n \geqslant 2$, on considère des n-uplets de 0 et de 1, c'est-à-dire des éléments de $\{0,1\}^n$ comme $\ell = (0,0,1,1,\dots,0)$.

1. Combien y a-t-il de tels n-uplets en tout ?
2. Combien y a-t-il de tels n-uplets avec exactement deux uns, qui sont côte à côte ?
3. Combien y a-t-il de tels n-uplets avec exactement deux uns ?
4. ★ On note p_n le nombre de tels n-uplets ne contenant jamais deux uns d'affilé. Établir une relation de récurrence vérifiée par p_n. Justifiez brièvement.

Exercice 2.

1. Déterminer une primitive F de la fonction $f : x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$. **Indication** : *Considérer une expression intégrale.*
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E) : y' = 3y + xe^{4x}$.

Exercice 3. Déterminer les fonctions f continues sur $]-1,1[$ et vérifiant : $\forall x \in \,]-1,1[, \quad \sqrt{1-x^2}f(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
Indication : *Introduire une fonction g, qui vérifiera une équation différentielle.*

Exercice 4. Soit f une fonction convexe continue sur $[a,b]$. On note $t = \frac{a+b}{2}$.

1. Énoncer l'inégalité des trois pentes vérifiée pour une fonction convexe et en déduire que la fonction $\Delta_t : x \mapsto \frac{f(x)-f(t)}{x-t}$ est croissante sur $]t,b]$.

On admet que Δ_t est croissante sur $[a,b]$, ce qui justifie l'existence de $\ell^- = \lim_{x\to t^-} \Delta_t(x)$ et $\ell^+ = \lim_{x\to t^+} \Delta_t(x)$ vérifiant $\ell^- \leqslant \ell^+$.

2. Soit $m \in [\ell^-, \ell^+]$. Montrer que $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \geqslant m(x-t) + f(t)$.

Exercice 5.

1. Écrire une fonction `decoupe` qui prend en argument une liste `l` et renvoie un couple de listes `(l1,l2)`, les deux listes formant une partition de `l` et vérifiant $\left|\text{len}(\texttt{l1}) - \text{len}(\texttt{l2})\right| \leqslant 1$.
2. On suppose donnée une fonction `fusion` qui prend en argument deux listes `l1, l2` triées et renvoie la liste triée contenant tous les éléments de `l1` et de `l2`.

   Écrire une fonction récursive `tri_fusion` qui utilise les fonctions précédentes pour trier une liste.

Exercice 6. On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$(H) : \quad 2xy' - 3y = 0 \quad \text{ et } \quad (E) : \quad 2xy' - 3y = \sqrt{x}.$$

1. Résoudre (H), puis (E) sur $]0,+\infty[$.
2. L'équation (E) admet-elle des solutions sur $[0,+\infty[$?

Exercice 7. Raccordements. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $xy' - y = x^2$

Exercice 8. On considère l'équation différentielle $(E) : 3(1+x^2)y^2y' = 1$

1. Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de (E). Expliciter et résoudre une équation différentielle (L) vérifiée par $z = y^3$.
2. Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.
   Indication : *la fonction $x \mapsto x^{1/3}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et non dérivable en 0.*

Exercice 9. Inégalité de Gibbs. Soit $\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$. On pose $H = -\sum_{k=1}^n \lambda_k \ln(\lambda_k)$.

1. Énoncer l'inégalité de concavité du logarithme, à n termes.
2. Montrer que $0 < H \leqslant \ln(n)$.
3. Soient $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\sum_{k=1}^n \mu_k = 1$, montrer que $\quad H \leqslant -\sum_{k=1}^n \lambda_k \ln(\mu_k)$

Exercice 10. Soit $T > 0$ et $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et T-périodiques. On considère l'équation différentielle $(E) : y' + a(t)y = b(t)$.

1. On suppose que $\int_0^T a(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$. Que dire de la différence de deux solutions de (E) ? En déduire que (E) admet au plus une solution périodique.
2. Énoncer le résultat d'unicité de la solution à un problème de Cauchy. En déduire qu'une solution y de (E) est T-périodique si et seulement si $y(0) = y(T)$. **Indication** : *Considérer la fonction $u : t \mapsto y(T+t)$.*
3. Sous l'hypothèse $\int_0^T a(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$, montrer que (E) admet une unique solution T-périodique.

Exercice 11. Lemme de Grönwall. Soient f, g continues, g positive, $A \geqslant 0$ tels que

$$\forall x \geqslant 0,\ f(x) \leqslant A + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

En considérant la fonction $\varphi : x \mapsto A + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, montrer que $\quad \forall x \geqslant 0,\ f(x) \leqslant Ae^{\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t}$.

Exercice 12. ★ Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que f est convexe ssi $\forall x \in \mathbb{R}, \forall h > 0$, $2hf(x) \leqslant \int_{x-h}^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$.
Indication : *Les deux hypothèses sont invariantes par ajout/retrait d'une fonction affine. Si f n'est pas convexe, elle est, en un point, en dessous d'une corde. On peut supposer que cette corde est horizontale.*

Exercice 13. ★ Un sous-ensemble non vide S de $\mathbb{Z}$ est dit direct si, pour $x, y, s, t \in S$, la condition $x + y = s + t$ implique que $\{x, y\} = \{s, t\}$.

1. Montrer qu'il existe $B > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout ensemble direct S inclus dans $[\![0, n]\!]$, on ait $|S| \leqslant Bn^{1/2}$,
2. Montrer qu'il existe $A > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un ensemble direct S inclus dans $[\![0, n]\!]$ tel que $An^{1/3} \leqslant |S|$.
   Indication : *Chercher à ajouter des éléments un à un à un ensemble de $[\![0, n]\!]$ de sorte à préserver le caractère direct. Si l'ensemble n'est pas trop grand, c'est possible.*