

Interro n°17

Exercice 1. Un mot de trois lettres est ici une 3-liste (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) de lettres parmi les 26 lettres de l'alphabet (6 voyelles et 20 consonnes). Déterminer le nombre de mots de trois lettres :

1. deux à deux distinctes
2. contenant au moins une consonne.

Exercice 2. Donner une bijection entre $\mathcal{C}_\subset = \{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 \mid A \subset B\}$ et $\mathcal{C}_\sqcup = \{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 \mid A \cap B = \emptyset\}$. Justifier brièvement.

Exercice 3. Soit $E = \llbracket 1, n \rrbracket$ et $A \subset E$ une partie de cardinal k .

1. Quel est le nombre de parties de E ?
2. Quel est le nombre de parties de E de cardinal k ?
3. Quel est le nombre de parties de E qui ne sont pas
- des parties de A ?
4. Quel est le nombre de parties $B \subset E$ telles que $A \cup B = E$?

Exercice 4. Quel est le nombre

1. d'applications de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, m \rrbracket$.
2. de bijections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.
3. d'applications injectives de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, m \rrbracket$?

Exercice 5. On considère un jeu de 52 ($= 4 \times 10 + 4 \times 3$) cartes. Déterminer le nombre de mains possibles de 5 cartes

1. contenant la dame de pique
2. contenant un carré (quatre fois la même valeur)
3. contenant exactement deux paires; et en particulier pas de brelan (3 cartes de mêmes valeurs) et pas de carré.

Exercice 6. On dispose de n boules numérotées de 1 à n et de p urnes numérotées de 1 à p (avec $n, p \in \mathbb{N}^*$). On lance chaque boule dans l'une des urnes, au hasard. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note $(X_i = j)$ l'évènement : « la i -ème boule tombe dans l'urne j ». On pourra noter $(X_i \neq j)$ l'évènement complémentaire.

Exprimer les évènements suivants à l'aide des évènements $(X_i = j)$:

1. A : « Toutes les boules tombent dans l'urne 1 ».
2. B : « L'urne 1 reste vide ».
3. C : « L'urne 1 contient au moins une boule ».
4. D : « Toutes les boules sont dans la même urne »

Exercice 7. Soit $p, q \in \mathbb{N}$ et $0 \leq n \leq p + q$. Montrer que
$$\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \binom{q}{n-k}.$$

Exercice 8.

1. $2n$ joueurs participent au premier tour d'un tournoi. Ils doivent être répartis par paires, dans n locations fixées. Quel est le nombre de répartitions possibles ?
2. Déterminer le nombre de partitions de $\llbracket 1, 2n \rrbracket$ en n parties de cardinal 2.

Exercice 9. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de \mathbb{R} . Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on pose $B_i = A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j$.

1. Montrer que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$.
2. Montrer que $\forall i \neq j, B_i \cap B_j = \emptyset$.

Exercice 10. Une urne contient p boules blanches et q boules noires. On effectue un tirage complet des boules, une à une sans remise, et on note séquentiellement les couleurs obtenues. Une issue est un $(p+q)$ -uplet comme $(N, N, B, B, B, N, B, \dots)$, avec p symboles **B** et q symboles **N**.

1. Quel est le nombre d'issues possibles ?

I On admet que toutes les issues sont équiprobables.

2. Quelle est la probabilité que toutes les boules noires aient été tirées de manière consécutives ?
3. Soit $k \in \llbracket q-1, p+q-1 \rrbracket$. Quelle est la probabilité que la dernière boule noire soit tirée à l'instant $k+1$?
4. En déduire la valeur de la somme $\sum_{k=q-1}^{p+q-1} \binom{k}{q-1}$.

Exercice 11.

1. Écrire une fonction récursive `pgcd` qui renvoie le pgcd de deux entiers.
2. Écrire une fonction récursive `eucl_et` qui prend en argument $a, b \in \mathbb{N}$ et renvoie un couple (u, v) tel que $au + bv$

Exercice 12. Pour tout $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on appelle p -partition de $\{1, \dots, n\}$ toute partition P de $\{1, \dots, n\}$ en p parties. Par exemple, $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5, 6\}\}$ est une 3-partition de $\{1, \dots, 6\}$. On note $P_{n,p}$ le nombre de p -partitions de $\{1, \dots, n\}$. Montrer que $\forall (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2, P_{n+1, p+1} = P_{n,p} + (p+1)P_{n,p+1}$.

Exercice 13.

1. Justifier brièvement que \mathbb{N}^2 est dénombrable.
2. Montrer que si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de parties de \mathbb{R} dénombrables, alors $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est dénombrable.
3. Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ des parties finies de \mathbb{N} est dénombrable.

Exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note \mathcal{S}_n l'ensemble des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Simplifier $S = \frac{1}{n!} \sum_{f \in \mathcal{S}_n} \sum_{k=1}^n |f(k) - k|$.

Indication : Se contenter de se ramener à des sommes usuelles, qu'il n'est pas nécessaire de calculer.

Exercice 15. ★ On s'intéresse à des chemins sur \mathbb{N}^2 , à pas unitaires vers le haut ou la droite.

1. Soit $k < n$. Montrer qu'il y a autant de chemins partant de $(0, 1)$, terminant en $(k, 2n - k)$ et touchant la diagonale que de chemins de partant de $(1, 0)$ et terminant en $(k, 2n - k)$
2. Montrer que le nombre de chemins de longueur $2n$, partant de $(0, 0)$ et ne rencontrant la diagonale qu'en $(0, 0)$ est $\binom{2n}{n}$.
3. Montrer que $\forall n, 4^n = \sum_{i+j=n} \binom{2i}{i} \binom{2j}{j}$