Interro n°17

En priorité : jusqu'au 10.1.

Exercice 1. Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u\colon E \to F$, $v\colon F \to G$ deux applications linéaires.

1. Montrer que $v \circ u\colon E \to G$ est linéaire.
2. Montrer que $\operatorname{Im} v = v(F)$ est un sous-espace vectoriel de G.
3. Comparer $\operatorname{Im}(v \circ u)$ à $\operatorname{Im} v$.

Exercice 2. Montrer que la famille $\left(\vec{f_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{f_2} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{f_3} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Indication : *Rappeler la définition d'une base.*

Exercice 3. Soient F, H, G des sous-espaces vectoriels de E. Montrer $(F + H) \cap (F + G) \supset F + (H \cap G)$.

Exercice 4. Pour $k \in [\![0, 2]\!]$, on considère $f_k\colon x \mapsto \cos(kx)$. Montrer que la famille de fonctions (f_0, f_1, f_2) est libre.

Exercice 5. Soient $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n \in E$.

1. Soit F un sous-espace vectoriel. Justifier en deux phrases que $\left(\forall i,\ \vec{e}_i \in F\right) \Leftrightarrow \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_n) \subset F$.
2. Montrer que $\operatorname{Vect}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) = \operatorname{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2 + \vec{e}_1, \vec{e}_3 + \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n + \vec{e}_1)$.

Exercice 6. Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose $\varphi(f) = f'$ et $\psi(f)\colon x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, c'est-à-dire $\psi(f) = F$, où $F\colon x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Vérifier que ψ est un endomorphisme de E. Il en va de même de φ.
2. Expliciter $\varphi \circ \psi$ et $\psi \circ \varphi$.
3. Quelles sont les images de φ et ψ ? Justifier brièvement.

Exercice 7. On considère $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\beta\colon X \in \mathbb{R}^n \mapsto BX$ l'application linéaire associée.

1. Décrire une famille génératrice de $\operatorname{Im} \beta$, en fonction de la matrice B.
2. On prend $n = 3$, $B = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ et $u\colon \mathcal{T}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \quad T \mapsto BT - TB$. Donner une famille génératrice simplifiée de $\operatorname{Im} u$.
   Indication : *Donner sans justifier une base de $\mathcal{T}_3$.*

Exercice 8. Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et pour $a \in \mathbb{R}$, $E_a = \{f \in E \mid f(a) = 0\}$.

1. Montrer que E_a est un sous-espace vectoriel.
2. ★ Montrer que si $a, b \neq 0$, alors $E_a + E_b = E$.
   Indication : *Formuler clairement ce qu'il s'agit de démontrer.*

Exercice 9. On considère $u\colon \mathbb{R}_5[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ qui à un polynôme $P \in \mathbb{R}_5[X]$ associe $u(P)$ le reste de la division euclidienne de P par $X^3 - 1$.

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Montrer que u est surjective.
   Indication : *Utiliser la définition de surjective (pour des applications non linéaires)*

Exercice 10. Soit $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ une famille libre dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On considère $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ et $\vec{u} = \alpha_1\vec{x}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{x}_n$.

1. On suppose que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1$. Montrer que $\left(\vec{x}_i + \vec{u}\right)_{i \leqslant n}$ est libre.
2. ★ À quelle condition sur $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ la famille $(x_i + u)_{i \leqslant n}$ est-elle libre ?

Exercice 11. Soit F un sous-espace vectoriel de E et $x, y \in E$. Montrer que $F + \operatorname{Vect} x = F + \operatorname{Vect} y$ si et seulement si il existe $z \in F$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}^*$ tels que $z = \alpha x + \beta y$.

Exercice 12. Soit E l'ensemble des applications $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ continues dont les restrictions à $[-1, 0]$ et $[0, 1]$ soient affines. On admet que E est un espace vectoriel. Donner une base de E. Justifier.

Indication : *Commencer par donner une paramétrisation de E. Attention à la continuité.*

Exercice 13. ★ Soit $(G, \times)$ un groupe abélien tel que $\forall x \in G$, $x^2 = e$.

1. On note $\mathbb{F}_2$ le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Décrire une structure de $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel sur G.
   On admet que tout espace vectoriel admet une base.
2. On suppose que G est fini. Montrer que $|G|$ est une puissance de 2.

Exercice 14. ★ ★ Soit $\varphi\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que $\forall u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\varphi(u) \in \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi\colon u \mapsto u_n$.

Indication : *Considérer l'image par φ d'une famille de suites élémentaires.*