Interro n°18

En priorité → ex 11 et 12.1.

Exercice 1. Énoncer deux versions de la formule des probabilités totales.

Exercice 2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0,1]$, rappeler la définition de la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ (si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, image de X et valeurs des probabilités) et décrire une situation réelle modélisée par une telle loi.

Exercice 3.

1. Soit E un espace vectoriel. À quelles conditions est-ce qu'une partie $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E ?
2. Montrer que $F = \{f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.
3. Donner deux sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}^2$ dont la réunion n'est pas un sous-espace vectoriel.

Exercice 4. Soit $A_1, \dots, A_n$ des évènements. Montrer que $\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$.

Indication : *Commencer par justifier le cas $n = 2$.*

Exercice 5. Une information booléenne est transmise le long d'une chaîne d'individus. À chaque étape, l'information reçue est transmise telle quelle à l'individu suivant avec une probabilité $p \in \,]0,1[$, et l'information contraire est transmise avec probabilité $1-p$. On note p_n la probabilité que l'information reçue par le n-ème individu soit correcte.

1. Déterminer une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n. Justifier.
2. En déduire une expression de p_n, puis la limite de p_n, quand $n \to +\infty$.

Exercice 6. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, $p, q \in [0,1]$ et $Z = X + Y$.

1. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(q)$ (lois de Bernoulli). Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = X+Y$.
   Indication : *Quelle est l'image de Z ?*
2. On suppose que X et Y sont quelconques, à valeurs dans $[\![0,n]\!]$. Pour $k \in [\![0,2n]\!]$, exprimer $\mathbf{P}(Z = k)$ comme une somme faisant intervenir les lois de X et Y.

Exercice 7. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes. Pour $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$. À quelle condition nécessaire les évènements $(X = x)$ et $(Y = y)$ peuvent-ils être incompatibles ?

Exercice 8. La fonction `mystere` suivante prend une chaîne de caractère en argument. Que renvoie-t-elle ? Quelle est sa complexité, en fonction de $n =$ `len(s)` ? Justifier.

```python
def mystere(s):
    if len(s) <= 1:
        return True
    if s[0] != s[len(s)-1]:
        return False
    return mystere(s[1:len(s)-1])
```

Exercice 9. Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire deux boules de cette urne. Calculer la probabilité d'obtenir 2 boules portant des numéros de même parité dans le cas suivant :

1. on tire les 2 boules simultanément.
2. on tire une boule, on la remet, puis on tire la seconde.

Exercice 10. On dispose de trois dés à 6 faces, deux d'entre eux étant normaux et le troisième étant pipé. Un dé est normal si chaque face a la même probabilité d'apparition, alors qu'un dé est pipé si la face 6 est trois fois plus probable que les autres. On choisit au hasard un dé et on le lance.

1. Pour $i \in [\![1,6]\!]$, quelle est la probabilité que la face i apparaisse ?
2. Sachant que le dé a donné 6, quelle est la probabilité qu'il soit pipé ?

Exercice 11. Une urne contient $n \geqslant 1$ boules numérotées de 1 à n. On tire avec remise $n+1$ boules dans cette urne. Pour $k \in [\![1,n+1]\!]$, on note A_k l'évènement «la k-ième boule tirée a déjà été tirée précédemment».

1. Pour $k \in [\![1,n+1]\!]$, interpréter l'événement $B_k = \overline{A_1 \cup \cdots \cup A_k}$.
2. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, que vaut $\mathbf{P}(A_{k+1} \mid B_k)$?
3. En déduire $\mathbf{P}(B_k)$.

Exercice 12. On joue à pile ou face $2n+1$ fois.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir strictement plus de «Pile» que de «Face» ?
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n+1} 2^{-k}\binom{k-1}{n} = \frac{1}{2}$.

Exercice 13. Un ascenseur dessert n étages d'un immeuble. Un nombre N de personnes montent dans l'ascenseur au rez-de-chaussée, où N est une variable aléatoire. Chaque personne i choisit un étage X_i auquel elle descend selon une loi uniforme et de manière indépendante des autres personnes. On note S le nombre d'arrêts que l'ascenseur va effectuer, c'est-à-dire $S = |\{X_1, \dots, X_N\}|$.

1. Exprimer $\mathbf{P}(S = j \mid N = k)$ comme une probabilité sur les X_i. Justifier soigneusement (formellement).
2. En déduire une relation entre $\mathbf{P}(S = j \mid N = k+1)$, $\mathbf{P}(S = j \mid N = k)$ et $\mathbf{P}(S = j-1 \mid N = k)$.

Exercice 14. ★ Soit $\mathbb{K}$ un corps fini à q éléments.

1. Quel est le nombre de droites vectorielles dans $\mathbb{K}^n$?
Indication : *Une droite vectorielle est un sev de la forme* $\mathrm{Vect}(\vec{x})$ *pour* $x \neq 0$*. Elle contient exactement* q *éléments (pourquoi ?).*
2. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que le nombre de familles libres $(e_1, \ldots, e_k)$ dans $\mathbb{K}^n$ est

$$(q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \ldots (q^n - q^{k-1}).$$

Indication : *Une famille libre est une famille dont aucun vecteur n'est une combinaison linéaire des précédents (et le premier est* $\neq \vec{0}$*). On admettra que sous cette hypothèse les éléments de* $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ *s'écrivent de manière unique comme combinaison linéaire de* $e_1, \ldots, e_k$*.*

Exercice 15. ★ Soit $(A_n)_{n \geqslant 1}$ une suite d'évènements indépendants. On note $p_n = \mathbf{P}(A_n)$, montrer que

$$\forall k, n \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}\Big(\sum_{i=1}^{n} 1_{A_i} \geqslant k\Big) \leqslant \frac{(\sum_{i=1}^{n} p_i)^k}{k!}$$