Interro n°18

Traiter en priorité soigneusement les exercices jusqu'au 11.

Exercice 1. Énoncer le théorème de la base incomplète.

Exercice 2. Soit $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ deux applications linéaires. Rappeler les inclusions liant $\operatorname{Ker}(g \circ f)$ et $\operatorname{Im}(g \circ f)$ aux noyaux et images de f, g. En démontrer une.

Exercice 3. Soit $x \in E$, F un sous-espace vectoriel de E et $A = x + F$ un sous-espace affine de E. Montrer que $F = \{a - b,\ (a, b) \in A^2\}$.

Exercice 4. Soit $F \oplus G = E$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. On considère $p_F\colon E \to E$ la projection sur F parallèlement à G, et s_F la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

1. Que dire de p_F^2 et s_F^2 ? Rappeler l'expression de s_F en fonction de p_F.
2. Montrer que pour tout $z \in E$, $p(z) - z \in \operatorname{Ker} p$.
3. Exprimer F et G comme les noyaux de certaines applications liées à s.

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Im} A$ et des bases de ces espaces.
   Indication : $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Im} A$ *sont le noyau et l'image de l'application* $\alpha\colon X \mapsto AX$.
2. Sont-ils en somme directe dans $\mathbb{R}^3$? Supplémentaires ?
   Indication : *Pour une partie, se contenter d'un argument géométrique.*

Exercice 6. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et $x \in E$ non nul. Montrer que $\operatorname{Vect} x$ est stable par u si et seulement si $u(x) \in \operatorname{Vect} x$.

Exercice 7. On considère $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ défini par $u\colon P \mapsto P + P(0)$.

1. Déterminer le noyau de u. L'application u est-elle injective ?
2. Montrer que u est surjective.

Exercice 8. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\operatorname{Id} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que f est un isomorphisme.
2. Montrer que $\operatorname{Im}(f + \operatorname{Id}) \subset \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id})$
3. Montrer que $\operatorname{Ker}(f + \operatorname{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id})$.

Exercice 9. Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère $F = \operatorname{Vect}(\sin, \cos)$ et $G = \{f \in E \mid f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = f(\pi)\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.
Indication : *Pour la partie plus difficile : cela revient à chercher* λ, μ *tels que...*

Exercice 10. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille libre de E. Montrer que $(u(x_i))_{i \leqslant n}$ est libre si et seulement si $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Vect}(x_i)_{i \leqslant n} = \{\vec{0}\}$.

Exercice 11. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} g$ sont supplémentaires.
   Indication : *Pour la partie plus dure : l'égalité* $f \circ g \circ f - f = 0_{\mathcal{L}(E)}$, *donne des éléments de* $\operatorname{Ker} f$.
2. Montrer que $f(\operatorname{Im} g) = \operatorname{Im} f$.

Exercice 12. Soient $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux projections sur le même sous-espace G. Montrer que $\lambda p + (1 - \lambda) q$ est une projection sur G.

Exercice 13. Soient V, W deux sea disjoints d'un espace vectoriel réel E. Montrer qu'il existe deux sous-espaces affines disjoints de même direction contenant respectivement V et W.

Exercice 14. ★ Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. On considère $F_1 = \{u \circ p,\ u \in \mathcal{L}(E)\}$ et $F_2 = \{u \circ (\operatorname{Id} - p),\ u \in \mathcal{L}(E)\}$. Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 15. ★ Soit u un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe un unique $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = \operatorname{Id}$. Montrer que u est bijectif.
Indication : *On admettra que tout sev admet un supplémentaire.*

Exercice 16. ★

1. Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et $\Phi\colon f \mapsto (x \mapsto (1 + x^2) f(x))$.
   (a) Montrer que Φ est un automorphisme de E.
   (b) Existe-t-il $F \subset E$ stable par Φ tel que
      (*i*) Φ_F ne soit pas injective ?
      (*ii*) Φ_F ne soit pas surjective ?
      Indication : *Il existe* F *tel que* Φ_F *ne soit pas surjective.*
2. Existe-t-il un automorphisme u de $\mathbb{R}[X]$ et $F \subset \mathbb{R}[X]$ stable par u tel que $u(F) \neq F$?