Interro n°19

Des exercices facultatifs au verso.

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^4$, on note $(e_1, \dots, e_4)$ la base canonique. On pose $h_1 = (1,1,0,1), h_2 = (1,0,1,0), h_3 = (1,-1,2,-1)$ et $H = \mathrm{Vect}(h_1, h_2, h_3)$. Déterminer $\dim H$ et montrer que $G = \mathrm{Vect}(e_3, e_4)$ est un supplémentaire de H dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2.

1. Rappeler la définition du rang d'une application linéaire et énoncer le théorème du rang.
2. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, expliciter une matrice M de rang 1, sans coefficients nuls.
3. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension finie.
   (a) Montrer que $\mathrm{rang}(u+v) \leqslant \mathrm{rang}\, u + \mathrm{rang}\, v$.
   (b) Montrer que si $u \circ v = 0_{\mathcal{L}(E)}$, alors $\mathrm{rang}\, u + \mathrm{rang}\, v \leqslant n$.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 + u = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u$ sont en somme directe.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u = E$.
3. Que dire de u si l'on suppose u bijective ?

Exercice 4. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que $\mathrm{Im}(u^2) = \mathrm{Im}\, u$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Ker}\, u$.
2. Donner un contre-exemple en dimension infinie.

Exercice 5.

1. Donner sans justifier les dimensions de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère $\Phi\colon M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto BMB^T$.
   (a) Montrer que Φ est linéaire.
   (b) Montrer que $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont stables par Φ.
   (c) On suppose $n = 2$. En calculant $\Phi\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, déterminer une CNS sur B pour que l'induit $\Phi_{\mathcal{A}_2}$ soit un isomorphisme.
   (d) ★ Pour n quelconque, justifier que si B est non inversible, Φ n'est pas un isomorphisme et en déduire qu'il n'est pas possible qu'à la fois $\Phi_{\mathcal{A}_n}$ et $\Phi_{\mathcal{S}_n}$ soient inversibles.
3. On suppose B inversible. En considérant $\Psi\colon M \mapsto BMB^{-1}$, montrer qu'il existe $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que BMB^{-1} soit symétrique.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel.

1. Rappeler la définition d'un hyperplan de E.
   On suppose à présent que E est de dimension finie n.
2. Soit H un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$, et $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de H.
   On considère $x \notin H$.
   (a) Montrer que $(e_1, \dots, e_{n-1}, x)$ est une base de E.
   (b) Pourquoi existe-t-il une forme linéaire $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall i$, $\varphi(e_i) = 0$ et $\varphi(x) = 1$? En déduire que H est un hyperplan de E.
   (c) Montrer que si φ_1, φ_2 sont deux formes linéaires telles que $\mathrm{Ker}\, \varphi_1 = \mathrm{Ker}\, \varphi_2 = H$, alors φ_1 et φ_2 sont colinéaires.

Exercice 7. Soit E de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ telles que $u^2 + u \circ v = \mathrm{Id}_E$. Montrer que u et v commutent.
Indication : *On a* $u \circ (u+v) = \mathrm{Id}$.

Exercice 8. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un ensemble stable par multiplication. On considère $\overline{\mathcal{A}} = \mathrm{Vect}\, \mathcal{A}$. On rappelle que $\mathrm{Vect}\, \mathcal{A}$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'un nombre quelconque d'éléments de $\mathcal{A}$.

1. Montrer que $\overline{\mathcal{A}}$ est stable par multiplication.
2. Justifier qu'on peut trouver une base de $\overline{\mathcal{A}}$ formée d'éléments de $\mathcal{A}$.
3. On suppose que $I_n \in \mathcal{A}$, et on se donne $A \in \overline{\mathcal{A}}$ une matrice inversible. On considère l'application $m_A\colon \overline{\mathcal{A}} \to \overline{\mathcal{A}} \quad B \mapsto AB$. Montrer que m_A est injective, et en déduire que $A^{-1} \in \overline{\mathcal{A}}$.

Exercice 9. ★ Soit E de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice p, et $\Phi\colon \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E) \quad v \mapsto u \circ v - v \circ u$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\Phi^n(v) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} u^{n-k} \circ v \circ u^k.$$
2. Montrer que Φ est nilpotente.

3. ★ Soit $a \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $b \in \mathcal{L}(E)$ tel que $a \circ b \circ a = a$.
   Indication : *Considérer un supplémentaire H de $\operatorname{Ker} a$, et définir b correctement sur une base de $\operatorname{Im} a$.*
4. ★ Quel est l'indice de nilpotence de Φ ?

Exercice 10. ★ Soit E de dimension n et $v_1, \ldots, v_n \in E$. Montrer que $\operatorname{rang}(v_i - v_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \leqslant n-1$, où $\operatorname{rang}(v_i - v_j)_{i,j}$ est le rang de cette famille de vecteurs.

Exercice 11. ★ **Inégalité de Frobenius**. Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\operatorname{rg} AB + \operatorname{rg} BC \leqslant \operatorname{rg} ABC + \operatorname{rg} B.$$

Indication : *Que dire de* $\operatorname{rang}(B) - \operatorname{rang}(AB)$ *?*