Interro n°19

En priorité : $\to$ 12.1.

Exercice 1. Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u\colon E \to F$, $v\colon F \to G$ deux applications linéaires.

1. Montrer que $v \circ u\colon E \to G$ est linéaire.
2. Montrer que $\operatorname{Im} v = v(F)$ est un sous-espace vectoriel de G.

Exercice 2. Soient F, H, G des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $(F + H) \cap (F + G) \supset F + (H \cap G)$.

Exercice 3. Soit $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ deux applications linéaires.

1. Rappeler les inclusions liant $\operatorname{Ker}(g \circ f)$ et $\operatorname{Im}(g \circ f)$ aux noyaux et images de f, g. En démontrer une.
2. Montrer que $\ker v \oplus \operatorname{Im} u$ si et seulement si $\ker(v \circ u) = \ker u$.

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Im} A$ et des bases de ces espaces.

Indication : *$\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Im} A$ sont le noyau et l'image de l'application $\alpha\colon X \in \mathbb{R}^3 \mapsto AX$.*

Exercice 5. Soit E l'espace vectoriel des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation : $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$. Donner sans justifier deux suites géométriques $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formant une famille génératrice de E.

Exercice 6. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et $x \in E$ non nul. Montrer que $\operatorname{Vect} x$ est stable par u si et seulement si $u(x) \in \operatorname{Vect} x$.

Exercice 7. Soient $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n \in E$.

1. Soit F un sous-espace vectoriel. Justifier en deux phrases que $\left(\forall i,\ \vec{e}_i \in F\right) \Leftrightarrow \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_n) \subset F$.
2. Montrer que $\operatorname{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = \operatorname{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2 + \vec{e}_1, \vec{e}_3 + \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n + \vec{e}_1)$.

Exercice 8.

1. Pour $k \in [\![0, 2]\!]$, on considère $f_k\colon x \mapsto \cos(kx)$. Montrer que la famille de fonctions (f_0, f_1, f_2) est libre.
2. ★ Montrer que $\operatorname{Vect}(x \mapsto \cos(kx))_{0\leqslant k\leqslant n} = \operatorname{Vect}(x \mapsto (\cos x)^k))_{0\leqslant k\leqslant n}$

Exercice 9. Soient E et F deux espaces vectoriels et u une application linéaire de E dans F. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Montrer que si la famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est libre dans F alors u est injective.

Exercice 10. On considère $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ défini par $u\colon P \mapsto P + P(0)$.

1. Déterminer le noyau de u.
2. Déterminer $u(\mathbb{R}_n[X])$.
3. Montrer que u est surjective.

Exercice 11. On considère une liste `l` d'entiers.

1.
```python
def mystere(l):
    d = {}
    for x in l:
        d[x] = None  # Associe à x une valeur None dans d. Si l'association
                     # est déjà présente dans d, aucun effet.
    return len(d)
```

   Que contient `d` après l'appel `mystere([1,2,2,3,1,0,2])` ? Que vaut sa longueur ? Quel est en général la complexité de `mystere` ?
2. En supposant le dictionnaire `d` précédent construit, écrire un court extrait de code qui affiche les éléments distincts de la liste.

Exercice 12. Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et pour $a \in \mathbb{R}$, $E_a = \{f \in E \mid f(a) = 0\}$.

1. Pour $a \neq b$, a-t-on $E_a \oplus E_b$?
2. Montrer que si $a \neq b$, alors $E_a + E_b = E$.

Exercice 13. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = u^2$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $u^n = u^2$.
2. Montrer que $\operatorname{Im}(u^2) = \ker(u - \mathrm{id}_E)$.
3. Montrer que $E = \ker(u^2) \oplus \operatorname{Im}(u^2)$.

Exercice 14. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes tels que $u\circ v - v\circ u = u$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $u^k \circ v - v \circ u^k$.

Exercice 15. Soit $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}}$ des réels distincts. Montrer que la famille suivante est libre : $(f_j\colon x \mapsto |x - \alpha_j|)_j$.

Exercice 16. ★ **Lemmes de factorisation**. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que tout sous-espace vectoriel de E admet des espaces supplémentaires. Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g \Leftrightarrow \exists h \in \mathcal{L}(E),\ g = h \circ f$.

Indication : *On prend un supplémentaire F du noyau de f. Alors f réalise une bijection de F sur* $\operatorname{Im} f$ *(pourquoi ?)*