

Interro n°20

Exercice 1. On considère un jeu de 52 ($= 4 \times 10 + 4 \times 3$) cartes. Déterminer le nombre de mains possibles de 5 cartes

1. contenant un carré (quatre fois la même valeur)
2. contenant 5 valeurs distinctes (c'est-à-dire aucune paire)
3. contenant exactement deux paires (pas de brelan, pas de carré)

Exercice 2. Soit f une fonction convexe continue sur $[a, b]$. On note $t = \frac{a+b}{2}$.

1. Justifier que la fonction $\Delta_t: x \mapsto \frac{f(x)-f(t)}{x-t}$ est croissante sur $[a, b]$.
Cela justifie l'existence de $\ell^- = \lim_{x \rightarrow t^-} \Delta_t(x)$ et $\ell^+ = \lim_{x \rightarrow t^+} \Delta_t(x)$ vérifiant $\ell^- \leq \ell^+$.
2. Soit $m \in [\ell^-, \ell^+]$. Montrer que $\forall x \in [a, b], f(x) \geq m(x-t) + f(t)$.

Exercice 3. Soient $x_1, \dots, x_n > 0$. On pose $y_1 = x_2, y_2 = x_3$, etc, $y_{n-1} = x_n$ et $y_n = x_1$. Montrer que $\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y_i} \geq n$.

Indication : Rappeler l'inégalité arithmético-géométrique

Exercice 4. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe continue.

1. Montrer que $\max_{[a,b]} f = \max(f(a), f(b))$.
2. Que dire de l'ensemble des points où f atteint un minimum ?

Indication : Montrer que c'est un intervalle.

Exercice 5.

1. $2n$ joueurs participent au premier tour d'un tournoi. Ils doivent être répartis par paires, dans n locations fixées. Quel est le nombre de répartitions possibles ?
2. Déterminer le nombre de partitions de $\llbracket 1, 2n \rrbracket$ en n parties de cardinal 2.

Exercice 6. Quel est le nombre

1. d'applications strictement croissantes de $\llbracket 1, 2 \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$?
2. d'applications croissantes de $\llbracket 1, 2 \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$?
3. d'applications injectives de $\llbracket 1, 2 \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$?
4. d'applications surjectives de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, 2 \rrbracket$?

Exercice 7. Combien y a-t-il de n -uplets de $\{0, 1\}^n$

1. contenant autant de 0 que de 1.
2. avec le premier 1 en position k .

Exercice 8. Soit $p \in \mathbb{N}$, et $m \geq p$.

1. Dessiner le triangle de Pascal, et indiquer où se trouvent les $\binom{n}{p}$, pour $n \in \llbracket p, m \rrbracket$.
2. Montrer que $\sum_{n=p}^m \binom{n}{p} = \binom{m+1}{p+1}$.

Exercice 9.

1. Soit U_9 l'ensemble des racines 9-ième de l'unité. Quel est le nombre de façon de colorier U_9 de sorte qu'un seul élément soit de couleur rouge, trois de couleur verte et cinq de couleur bleue ?
2. ★ Quel est le nombre de colliers différents de neuf perles dont l'une est de couleur rouge, trois de couleur verte et cinq de couleur bleue ?

Exercice 10. Partitions d'un entier.

1. Soit $E_{n,p}$ l'ensemble des $(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ tels que $x_1 + x_2 + \dots + x_n = p$. Déterminer $|E_{n,p}|$.
2. ★ Soit $F_{n,p}$ l'ensemble des $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^*$ tels que $x_1 + \dots + x_n = p$. Montrer que $|F_{n,p}| = \binom{p-1}{n-1}$.

Exercice 11. $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Montrer que $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ est convexe si et seulement si $x \mapsto xf(x)$ est convexe.

1. Sous l'hypothèse f deux fois dérivable.
2. ★ sans hypothèse.

Exercice 12. ★ Soit $s(n, k)$ le nombre d'applications surjectives de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, k\}$. Pour $1 \leq i \leq k$, on note E_i l'ensemble des applications de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, k\}$ dont l'image ne contient pas i .

1. Soit $1 \leq \ell \leq k$ et $1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq k$ des entiers. Calculer le cardinal de $E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_\ell}$.

2. En utilisant la formule du crible, montrer que $s(n, k) = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n$.

Exercice 13. Dérangements. On appelle dérangement de $\llbracket 1, n \rrbracket$ toute permutation σ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ n'admettant aucun point fixe. On note D_n le nombre de dérangements de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et on convient que $D_0 = 1$.

1. Montrer, pour $n \geq 0$, que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k = n!$.
2. ★ Montrer que $D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1})$. En déduire que pour tout $n \geq 2$, $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$.

Exercice 14. ★ Sur un polygone régulier à n côté, déterminer le cardinal du plus grand ensemble de sommets tels qu'aucun trois d'entre eux ne forment un triangle équilatéral.

Exercice 15. ★ Soient $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexes, telles que $\forall x, \max(f(x), g(x)) \geq 0$. Montrer qu'il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, (1 - \lambda)f(x) + \lambda g(x) \geq 0$.

Indication : *Supposer que les fonctions sont dérivables. Faire un dessin.*