Interro n°21

En priorité : jusqu'au 11.2.

Exercice 1. Énoncer deux versions de la formule des probabilités totales.

Exercice 2. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n, p.

1. Rappeler l'image et la loi de X.
2. Décrire une expérience aléatoire modélisée par la variable X.

Exercice 3. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Rademacher de paramètre $p \in [0{,}1]$ si $X(\Omega) = \{-1, 1\}$, $P(X = 1) = p$ et $P(X = -1) = 1 - p$.
Soient X_1, X_2 deux variables de Rademacher de paramètres p_1 et p_2. Déterminer la loi de $Z = X_1X_2$.

Exercice 4. Soit $A_1, \dots, A_n$ des évènements. Montrer que

1. $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} P(A_i) \leqslant P\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\Big)$
2. $P\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\Big) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$.
   Indication : *Commencer par justifier le cas $n = 2$.*

Exercice 5. Une information booléenne est transmise le long d'une chaîne d'individus. À chaque étape, l'information reçue est transmise telle quelle à l'individu suivant avec une probabilité p, et l'information contraire est transmise avec probabilité $1 - p$. On note p_n la probabilité que l'information reçue par le n-ème individu soit correcte.

1. Déterminer une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n. Justifier.
2. En déduire une expression de p_n, puis la limite de p_n, quand $n \to +\infty$.

Exercice 6.

1. Énoncer la formule de Bayes.
2. Bob apprend à Alice à cuisiner des cannelés. Bob les réussit neuf fois sur dix et Alice six fois sur dix. Pour s'entrainer, Alice cuisine deux fois plus souvent que Bob. On mange des cannelés réussis, quelle est la probabilité qu'ils aient été cuisinés par Alice ?
   Indication : *Noter 4 évènements : R : «les cannelés sont réussis», $\overline{R}$: «ils sont ratés», A : «ils ont été cuisinés par Alice», et $\overline{A}$.*

Exercice 7.

1. Soit A un évènement tel que $P(A) = 0$. Montrer que A est indépendant de tout autre évènement. Qu'en est-il si $P(A) = 1$?
2. Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes. Pour $x \in X_1(\Omega)$ et $y \in X_2(\Omega)$ tels que $P(X = x) > 0$ et $P(Y = y > 0)$. À quelle condition nécessaire les évènements $(X = x)$ et $(Y = y)$ peuvent-ils être incompatibles ?

Exercice 8. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables de Bernoulli indépendantes modélisant le lancer de n pièces biaisées. On note $N = \min\{k \in [\![1, n]\!] \mid X_k = 0\}$ l'indice du premier lancer qui donne «Face». Si tous les lancers donnent «Pile», on note $(N = \varnothing)$.

1. Exprimer l'évènement $(N = \varnothing)$ en fonction des variables X_i.
2. On suppose que les X_i suivent des lois $\mathcal{B}(\frac{1}{k})$. Déterminer la loi de N.

Exercice 9. On lance 6 dés. Quelle est la probabilité que toutes les faces exhibent un chiffre différent ?

Exercice 10. Une urne contient $n \geqslant 1$ boules numérotées de 1 à n. On tire avec remise $n + 1$ boules dans cette urne. Pour $k \in [\![1, n+1]\!]$, on note A_k l'évènement «la k-ième boule tirée, a déjà été tirée précédemment».

1. Pour $k \in [\![1, n+1]\!]$, interpréter l'événement $B_k = \overline{A_1 \cup \cdots \cup A_k}$.
2. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, que vaut $P(A_{k+1} \mid B_k)$?
3. En déduire $P(B_k)$.

Exercice 11. Loi de succession de Laplace. On considère $n + 1$ urne numérotées de 0 à n, telles que l'urne k contienne $n - k$ boules noires et k boules blanches. On choisit une urne au hasard et on tire successivement avec remise dans cette urne.

1. Dans cette question uniquement, on suppose que l'on tire dans l'urne k. Quelle est la probabilité que les N premières boules tirées soient blanches ? Justifier.
2. Déterminer la probabilité p_n que les N premières boules tirées soient blanches. ★ Justifier que $p_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{N+1}$ lorsque $n \to +\infty$.
3. Déterminer la probabilité q_n que la $(N + 1)$-ième boule tirée soit blanche sachant que les N premières boules tirées étaient blanches. Quelle est la limite de q_n, lorsque $n \to +\infty$?

Exercice 12. Une urne contient n boules distinctes. On tire m boules de l'urne. Puis on les remet, et on en retire m. Quelle est la probabilité que les deux tirages comportent au moins une boule en commun ?

Exercice 13. ★ On joue à pile ou face $2n+1$ fois.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir strictement plus de «Pile» que de «Face» ?
2. Montrer que
$$\sum_{k=n+1}^{2n+1} 2^{-k}\binom{k-1}{n} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 14. ★ Soit $\alpha \in]0,1[$. Un joueur joue n parties d'un même jeu. La probabilité de victoire à chaque partie est $\frac{\alpha}{n}$.

1. On suppose les parties mutuellement indépendantes. Montrer que l'on peut minorer la probabilité d'obtenir exactement une victoire par un réel > 0 indépendant de n.
2. On suppose uniquement que les parties sont indépendantes deux à deux.
   (a) Peut-on majorer la probabilité précédente par une constante $< \alpha$?
   (b) Peut-on minorer la probabilité précédente par une constante > 0 ?

Exercice 15. ★ Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'évènements indépendants. On note $p_n = P(A_n)$, montrer que
$$\forall k, n \in \mathbb{N},\ P\Big(\sum_{i=1}^{n} 1_{A_i} \geqslant k\Big) \leqslant \frac{(\sum_{i=1}^{n} p_i)^k}{k!}$$