Interro n°22

Exercice 1.

1. Énoncer la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral en un point a.
2. En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \geqslant 0$, $e^x \geqslant \frac{x^k}{k!}$.

Exercice 2. Donner les DL en 0 à un ordre quelconque de

1. e^x
2. $\ln(1+x)$
3. $\cos x$

Exercice 3.

1. Soit $n \geqslant 2$. Justifier que $\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ et donner sans justifier une minoration de $\frac{1}{\sqrt{n}}$ du même type.
2. Montrer que $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ vérifie $S_n \sim_{+\infty} 2\sqrt{n}$.
3. Quelle est la nature de la série $\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{k}}$?

Exercice 4. Déterminer le $DL_5(0^+)$ de $(x^2 + 2x^3 + 2x^4)^{3/2}$

Exercice 5.

1. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}$ la fraction $\frac{1}{x^2+1}$.
   Indication : *Les coefficients seront complexes.*
2. En déduire une expression explicite de $\arctan^{(n)}$.

Exercice 6. Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ et $f''(0) = -1$.

1. Écrire un $DL_2(0)$ de f.
2. Montrer que, pour $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^x = e^{-a^2/2}$.

Exercice 7.

1. Montrer que $f\colon x \mapsto xe^{x^2}$ admet une réciproque $\mathcal{C}^\infty$.
2. Déterminer un $DL_3(0)$ de f^{-1}.

Exercice 8. Soit $z \in \mathbb{C}$.

1. À quelle condition sur z est-ce que la série $\sum z^n$ converge ? Dans ce cas, préciser sa somme.
2. (a) À l'aide de la fonction $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$, montrer que pour $x \in \left]-1,1\right[$, $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1-(1+n)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$.
   (b) En déduire, pour $x \in \left]-1,1\right[$, la nature de la série $\sum_{k \geqslant 0} kx^k$, et la valeur de sa somme.
   Indication : *L'étude de la nature d'une série revient à l'étude de la nature d'une suite.*
3. ★ Expliquer comment étendre le résultat précédent à la série $\sum_{k \geqslant 0} kz^k$, pour $z \in \mathbb{C}$ de module < 1.

Exercice 9. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables indépendantes suivant des lois de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, et, pour $k \in [\![0, n]\!]$, $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$.

1. Rappeler la définition de $\mathcal{B}(p)$, et justifier que S_k suit une loi $\mathcal{B}(k,p)$.
2. On considère $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables indépendantes, d'images $\{-1, 1\}$ avec $P(Z_i = 1) = P(Z_i = -1) = \frac{1}{2}$, et $T_k = \sum_{i=1}^{k} Z_i$, $(T_0 = 0)$.
   (a) Justifier que pour $n \in \mathbb{N}$, $P(T_{2n+1}) = 0$.
   (b) Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(T_{2n} = 0)$.
   Indication (b) : *Ou bien, compter le nombre d'issues élémentaires, et multiplier par leur probabilité commune, ou bien considérer* $T_{2n}^* = \frac{T_{2n}+2n}{2}$.

Exercice 10. Déterminer une CNS sur $a_1, \dots, a_n$ pour que $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\tan(kx)}$ tende vers 0 quand $x \to 0$.
Indication : *Écrire un DL de chaque sommande.*

Exercice 11. Fonction de Bernoulli.

1. On considère $\varphi\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$.
   (a) Montrer que φ est prolongeable par continuité en 0, et que ce prolongement (que l'on note aussi φ) est dérivable en 0. Préciser $\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$.
   (b) Justifier que φ admet un développement limité en 0 à l'ordre n (que l'on ne cherchera pas à déterminer).
2. On pose $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o_0(x^n)$. Montrer que $a_0 = 1$ et que

$$\forall n \geqslant 1, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k)!} a_k = 0.$$

Exercice 12. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $f(0) = f'(0) = 0$ et $f''(0) > 0$.

1. Montrer l'existence de $a > 0$ tel que f soit strictement décroissante sur $[-a, 0]$ et strictement croissante sur $[0, a]$. **Indication** : *Utiliser la continuité de f''.*
2. Soit $b = \min(f(-a), f(a))$. Montrer que pour tout $\lambda \in [0, b]$, l'équation $f(x) = \lambda$ admet une unique solution $x_1(\lambda)$ dans $[-a, 0]$ et une unique solution $x_2(\lambda)$ dans $[0, a]$.
3. Déterminer des équivalents de $x_1(\lambda)$ et $x_2(\lambda)$ en 0^+.

4. ★ On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^3$. Étudier la limite en 0 de $\frac{x_1(\lambda)+x_2(\lambda)}{\lambda}$.

Exercice 13. ★ Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive, et $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

1. Montrer que si $\sum a_n$ converge, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, m \geqslant n_0$, $|S_n - S_m| \leqslant \varepsilon$.
2. On suppose que $\sum a_n$ diverge. Montrer que $\sum \frac{a_n}{S_n}$ diverge.