Interro n°23

En priorité : jusqu'au 10.1.

Exercice 1. Énoncer le critère spécial des séries alternées (dont les informations sur la somme de la série).

Exercice 2. Nature de la série de terme général $3\ln(n^2+1) - 2\ln(n^3+1)$

Exercice 3.

1. Encadrer, pour $2 \leqslant n \leqslant N$, $\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k\sqrt{k}}$ par des intégrales.
2. Équivalent, quand $n \to +\infty$, de $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$.

Exercice 4. Nature de $\sum \frac{1}{n}(2 - \sqrt[n]{3})^n$.

Exercice 5. Déterminer une CNS sur les paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pour que

1. la série $\sum \frac{1}{n^\alpha + n^\beta}$ converge.
   Indication : *Discuter selon* $\gamma = \max(\alpha, \beta)$.
2. la série $\sum \frac{n^\alpha}{n^\beta + 1}$ converge.

Exercice 6. Pour $p \in \mathbb{N}$, on considère $a_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{2^n}$.

1. Justifier l'existence de a_p.
2. (a) Pour $p \in \mathbb{N}$, en effectuant le changement d'indice $n = n' + 1$, montrer que $a_p = \sum_{k=0}^{p-1} a_k \binom{p}{k} + 1$.
   (b) En déduire soigneusement que $\forall p,\ a_p \in \mathbb{N}$.

Exercice 7. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} \text{ si } n \text{ est un carré} \\ \frac{1}{n^2} \text{ sinon} \end{cases}$.

1. A-t-on $u_n = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$?
2. Donner une paramétrisation des carrés de $[\![1, n]\!]$.
3. Montrer que $\sum u_n$ converge.
   Indication : *Majorer une somme partielle.*

Exercice 8.

1. Montrer que $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + O_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$ à déterminer.
2. Étudier la convergence et la convergence absolue de $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.
   Indication : $\sin(n\pi + x) = (-1)^n \sin x$.

Exercice 9. Soit $u_n = \frac{1}{3^n n!} \prod_{k=1}^{n} (3k-2)$ et $v_n = \frac{1}{n^{3/4}}$.

1. Montrer que APCR, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$.
   Indication : *Faire un développement asymptotique de* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *et* $\frac{v_{n+1}}{v_n}$.
2. Nature de $\sum v_n$?
3. Montrer que $\sum u_n$ diverge.
4. ★ Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \frac{\lambda}{n^{2/3}}$.
   Indication : *Question indépendante de ce qui précède. On pourra se contenter d'expliquer précisément comment procéder, sans mener les calculs.*

Exercice 10. Soit $\sum u_n$ est une série convergente.

1. On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Montrer que $nR_n = o_{+\infty}(n)$.
2. ★ Montrer que $T_n = \sum_{k=0}^{n} k u_k$ vérifie $T_n = o_{+\infty}(n)$
   Indication : *Ajouter* nR_n *à la quantité.*

Exercice 11. Produit de Cauchy. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. Le produit de Cauchy de ces deux suites est la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

1. On suppose que les suites (a_n) et (b_n) sont positives et que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent. Montrer que $\sum c_n$ converge.
2. On suppose que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument. Montrer que $\sum c_n$ converge.

On a alors $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k\right)$.

Exercice 12. ★ Soit (a_n) une suite strictement positive. On suppose (a_n) décroissante. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = 1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}$.
Indication : *Considérer* $\sum \ln \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Exercice 13. ★ Montrer que tout réel $x \in [0,1[$ peut s'écrire de manière unique $x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}$, avec une suite (a_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in [\![0, n-1]\!]$ et $\forall n_0, \exists n \geqslant n_0,\ a_n \neq n-1$.