Interro n°23

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n est impair, $n^5 - n$ est divisible par 20.

Exercice 2.

1. Montrer que $n+1$ divise n^3+1.
2. Déterminer les entiers naturels n tels que $n+1$ divise n^3+4.

Exercice 3. On considère une suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_0 u_1 \dots u_{n-1} + 1$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, u_n et u_k sont premiers entre eux.
2. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice 4. Soient a, b premiers entre eux. Justifier que $\text{ppcm}(a,b) = ab$.

Exercice 5.

1. Pour $a, b \in \mathbb{Z}$. Justifier brièvement l'existence de $d \in \mathbb{N}$ tel que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$, puis que d est le plus grand diviseur commun à a et b.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = 2^n + 3^n$.
   (a) Montrer que $2^n \in a_n\mathbb{Z} + a_{n+1}\mathbb{Z}$ et $3^{n+1} \in a_n\mathbb{Z} + a_{n+1}\mathbb{Z}$.
   (b) En déduire $\text{pgcd}(a_n, b_n)$.

Exercice 6. Résoudre $n^x + n^y = n^z$, avec $x, y, z, n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7. ★ Résoudre l'équation $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{n}{a+b}$, d'inconnues $a, b, n \in \mathbb{N}^*$.
Indication : *Peut-on supposer que a et b sont premiers entre eux ?*

Exercice 8. ★ Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que a et b sont premiers entre eux si et seulement si pour tout entier $n \geqslant (a-1)(b-1)$, il existe $(u,v) \in \mathbb{N}^2$ tel que $au + bv = n$.
Indication : *Il s'agit de trouver u tel que $n - au$ soit un multiple de b.*

Exercice 9. ★ **Théorème de Wolstenholme**. Soit $p > 3$ un nombre premier. On écrit $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1} = \frac{a}{(p-1)!}$.

1. Soient $u, v \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{u}{v} \in \mathbb{Z}$. On suppose que v est inversible modulo n c'est-à-dire qu'il existe $v' \in \mathbb{Z}$ tel que $vv' \equiv 1[n]$. Justifier que $\frac{u}{v} \equiv uv'[n]$.
2. Montrer que p divise a.

Interro n°23

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n est impair, $n^5 - n$ est divisible par 20.

Exercice 2.

1. Montrer que $n+1$ divise n^3+1.
2. Déterminer les entiers naturels n tels que $n+1$ divise n^3+4.

Exercice 3. On considère une suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_0 u_1 \dots u_{n-1} + 1$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, u_n et u_k sont premiers entre eux.
2. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice 4. Soient a, b premiers entre eux. Justifier que $\text{ppcm}(a,b) = ab$.

Exercice 5.

1. Pour $a, b \in \mathbb{Z}$. Justifier brièvement l'existence de $d \in \mathbb{N}$ tel que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$, puis que d est le plus grand diviseur commun à a et b.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = 2^n + 3^n$.
   (a) Montrer que $2^n \in a_n\mathbb{Z} + a_{n+1}\mathbb{Z}$ et $3^{n+1} \in a_n\mathbb{Z} + a_{n+1}\mathbb{Z}$.
   (b) En déduire $\text{pgcd}(a_n, b_n)$.

Exercice 6. Résoudre $n^x + n^y = n^z$, avec $x, y, z, n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7. ★ Résoudre l'équation $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{n}{a+b}$, d'inconnues $a, b, n \in \mathbb{N}^*$.
Indication : *Peut-on supposer que a et b sont premiers entre eux ?*

Exercice 8. ★ Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que a et b sont premiers entre eux si et seulement si pour tout entier $n \geqslant (a-1)(b-1)$, il existe $(u,v) \in \mathbb{N}^2$ tel que $au + bv = n$.
Indication : *Il s'agit de trouver u tel que $n - au$ soit un multiple de b.*

Exercice 9. ★ **Théorème de Wolstenholme**. Soit $p > 3$ un nombre premier. On écrit $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1} = \frac{a}{(p-1)!}$.

1. Soient $u, v \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{u}{v} \in \mathbb{Z}$. On suppose que v est inversible modulo n c'est-à-dire qu'il existe $v' \in \mathbb{Z}$ tel que $vv' \equiv 1[n]$. Justifier que $\frac{u}{v} \equiv uv'[n]$.
2. Montrer que p divise a.