Interro n°24

Exercice 1. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Exercice 2. On considère E un espace de dimension 3 et un endomorphisme u de E dont la matrice dans une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Quelle est la matrice de u dans la base $\mathcal{B}' = (e_3, e_2, e_1)$?

Exercice 3.

1. Rappeler la définition de la trace d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, pour E de dimension finie.
2. Montrer que si E est de dimension finie et $p \in \mathcal{L}(E)$ est une projection, alors $\mathrm{Tr}\, p = \mathrm{rang}\, p$.

Exercice 4. Soient $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une décomposition par blocs, où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{R})$.

1. À quelle condition sur A, B, C, D la matrice M est-elle symétrique ?
2. On suppose que A est inversible. Montrer que $\mathrm{rang}\, M \geqslant p$.
3. On suppose que $n = 2p$, c'est-à-dire $p = n-p$, et que A et D sont inversibles. La matrice M est-elle nécessairement inversible ?

Exercice 5.

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. À quelle condition A et B sont-elles équivalentes ? Rappeler la définition, et une caractérisation simple.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer qu'il existe $U \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $AUA = A$.
   Indication : *Commencer par le justifier pour la matrice* $A = J_r = \mathrm{Diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$.
   (b) Montrer qu'il existe $U \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que UA soit une matrice de projection.

Exercice 6. On considère $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} -1 & 2i \\ -2i & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

1. Montrer que $\left(e_1 = \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{C}^2$.
2. Vérifier que $D = \mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(f)$ est diagonale.
3. Expliquer comment calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7.

1. Soit E un espace de dimension n et V un sous-espace vectoriel de E de dimension p. On note $\mathcal{V} = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid V \subset \mathrm{Ker}\, u\}$. Déterminer la dimension de $\mathcal{V}$.
2. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Quelle est la dimension de l'ensemble $\{AB,\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\}$?

Exercice 8. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère T_α l'opérateur de translation défini par $\forall f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad T_\alpha(f)(x) = f(x+\alpha)$. On considère $F = \{y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid y'' = -y\}$ et on fixe $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Donner une base $\mathcal{B}$ de F.
2. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, F est stable par T_α et que T_α induit un isomorphisme de F.
3. Expliciter la base de T_α dans $\mathcal{B}$.

Exercice 9. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1. On note $C = A + B$ et on fait l'hypothèse que $\mathrm{rang}\, C = 1$.

1. Montrer que si $\mathrm{Ker}\, A \neq \mathrm{Ker}\, B$ il existe $x \in \mathrm{Ker}\, A \setminus \mathrm{Ker}\, B$ et $y \in \mathrm{Ker}\, B \setminus \mathrm{Ker}\, A$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Im}\, B$ ou $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, B$.

Exercice 10. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ tel que $u^2 + u + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4} = 0$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^4$ non nul, $F_x = \mathrm{Vect}(x, u(x))$ est stable par u, et est de dimension 2.
   Indication : *On pourra supposer par l'absurde que* $u(x)$ *est colinéaire à* x.
   On admet que si $y \notin F_x$, alors $F_x \oplus F_y$.
2. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 11. On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et la suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k$.

1. On note $V_n = (v_0, \dots, v_n)$ et $U_n = (u_0, \dots, u_n)$, interprétés comme des vecteurs colonnes. Expliciter une matrice M tel que $V_n = MU_n$.
2. Déterminer une expression explicite de u_n en fonction des v_k, pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

Exercice 12. ★ **Espaces de Hochschild de dimension** 2..

On note E le $\mathbb{R}$-ev des applications dérivables $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère $T_\alpha\colon E \to E$ l'opérateur de translation défini par

$$\forall f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad T_\alpha(f)(x) = f(x+\alpha).$$

Soit $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que la famille (g, h) soit libre, et $F = \operatorname{Vect}(g, h)$. On suppose que F est stable par tous les T_α.

1. Soit $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_1) \neq 0$. Justifier l'existence d'un réel $x_2 \in \mathbb{R}$ tel que $M = \begin{pmatrix} g(x_1) & h(x_1) \\ g(x_2) & h(x_2) \end{pmatrix}$ soit inversible.

   On pourra utiliser qu'une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.
2. Montrer qu'il existe des constantes C_1, C_2, C_3, C_4 telles que pour toute fonction $f \in F$, dont on note (λ, μ) ses coordonnées dans la base (g, h), on ait

$$\lambda = C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) \quad \text{et} \quad \mu = C_3 f(x_1) + C_4 f(x_2).$$

3. Soit $f \in F$.
   (a) En utilisant la question précédente, montrer soigneusement que $f' \in F$.
   (b) En déduire que f est solution d'une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants.

Exercice 13. ★ Soit $n \geqslant 3$. caractériser les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ pour lesquels il existe une base dans laquelle u est représenté par une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, où $M \in \mathcal{M}_{n-2}(\mathbb{K})$.