

Interro n°24

Exercice 1. Donner la définition du degré d'une fraction $F \in \mathbb{C}(X)$, et d'un pôle de F . Montrer qu'il n'existe pas de $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F^2 = X$.

Exercice 2. Déterminer la partie entière de $R = \frac{X^4+2X^3+1}{X^2+X+1}$.

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$ qui sont premiers avec n .

1. Pour p premier, donner la valeur de $\varphi(p)$, puis de $\varphi(p^\alpha)$. Justifier.
2. ★ On considère les fractions $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}$, et on réduit chacune sous forme irréductible. Pour d divisant n , combien reste-t-il de fractions avec d comme dénominateur ? En déduire la valeur de $\sum_{d|n} \varphi(d)$.

Exercice 4. Soit $P = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5$.

1. Expliquer comment trouver la factorisation $P = (1 + X)(1 + X + X^2)(1 - X + X^2)$.
2. Donner la forme de la décomposition en éléments simples de $F = \frac{X}{P}$ dans $\mathbb{R}(X)$. Justifier brièvement.
3. Déterminer un des coefficients, et deux autres relations simples entre les coefficients, par des méthodes différentes.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = a^2$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = b^3$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = c^6$.

Exercice 6. Déterminer une primitive de $\frac{1}{1-x^4}$.

Exercice 7. Soit $F = \frac{1}{(X^3-1)^3}$.

1. Calculer la partie polaire de F en 1. **Indication :** Faire un DL, quand $x \rightarrow 1$, avec 3 termes.
2. Sans mener les calculs, expliciter une propriété algébrique de symétrie de F qui permettrait de déterminer la partie polaire en j à partir de celle en 1.

Exercice 8.

1. Soit $P = \prod (X - a_i)^{m_i}$ un polynôme scindé. Donner sans justifier la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$.
2. Calculer $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1-\omega^k}$, où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. **Indication :** Utiliser un polynôme dont les racines sont les ω^k .

Exercice 9. Soient A, B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ non constants et premiers entre eux.

1. On considère (U_0, V_0) tels que $AU_0 + BV_0 = 1$. Montrer que (U, V) est un couple de Bezout de (A, B) si et seulement s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $(U, V) = (U_0 - BQ, V_0 + AQ)$.
2. Montrer que (A, B) admet un unique couple de Bezout (U, V) tel que $\deg U < \deg B$ et $\deg V < \deg A$.

Exercice 10.

1. Décomposer $\frac{X^3+1}{X^3-2X^2+X}$ en éléments simples.
2. Calculer $\int_2^4 \frac{x^3+1}{x^3-2x^2+x} dx$.

Exercice 11. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{Z}$, on a $a^{13} \equiv a[210]$.

Exercice 12. Soit p un nombre premier impair, et $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On dit que $a \in \mathbb{K}$ est un carré si $\exists x \in \mathbb{K}, a = x^2$.

1. Déterminer les carrés de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.
2. Soit $a \in \mathbb{K}$ non nul. Montrer que l'équation $x^2 = a$ admet 0 ou 2 solutions. En déduire qu'il existe exactement $\frac{p-1}{2}$ carrés non nuls dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.
3. En utilisant le théorème de Fermat, factoriser le polynôme $X^{p-1} - 1$ dans $\mathbb{K}[X]$.
Montrer que si a est un carré non nul, alors a est racine de $X^{(p-1)/2} - 1$.
En déduire que les carrés non nuls de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sont exactement les racines de $X^{(p-1)/2} - 1$.
4. Montrer que -1 est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si et seulement si p est congru à 1 modulo 4.
5. Soit $k \geq 2$ pair. Montrer que les facteurs premiers de $k^2 + 1$ sont congrus à 1 modulo 4. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 4.

Exercice 13. Soit $F \in \mathbb{Q}(X)$.

1. Justifier l'existence de $A, B \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $F = \frac{A}{B}$, puis qu'il existe $U, V \in \mathbb{Z}[X]$ et $c \in \mathbb{Z}$ tels que $AU + BV = c$.
2. On suppose qu'il existe une infinité de $n \in \mathbb{Z}$ tel que $F(n) \in \mathbb{Z}$. Montrer que $F \in \mathbb{Q}[X]$.
3. ★ Si $F \in \mathbb{Q}[X]$ et $\forall k \in \llbracket 0, d \rrbracket, F(k) \in \mathbb{Z}$, où $d = \deg F$, montrer que $\forall k \in \mathbb{Z}, F(k) \in \mathbb{Z}$.

Exercice 14. ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et z_1, \dots, z_n les racines de $X^n + 1$. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $F_k = \frac{X^k}{X^n+1}$.

1. Décomposer F_k en éléments simples.
2. Montrer que pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$,
$$XP'(X) = \frac{n}{2}P(X) + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{z_k P(z_k X)}{(z_k - 1)^2}.$$

Indication : Vérifier l'identité pour X^k .

3. Pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on note $\|Q\|_\infty = \max_{|z|=1} |Q(z)|$. Montrer que $\|P'\|_\infty \leq n \|P\|_\infty$.

Indication : Il faudra calculer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{|z_k - 1|^2}$, en utilisant la question précédente.