Interro n°25

Exercice 1.

1. Énoncer et démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables indépendantes de même loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$ et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Donner $E(\frac{S_n}{n})$ et $V(\frac{S_n}{n})$ et en déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant \frac{1}{2} + \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 2. On considère E un espace de dimension 3 et un endomorphisme u de E dont la matrice dans une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Quelle est la matrice de u dans la base $\mathcal{B}' = (e_3, e_2, e_1)$?

Exercice 3. Soit $m \geqslant 2$. Une urne contient 2 BB et $m-2$ BN. On les tire une à une sans remise. On note X (resp. Y) le rang d'apparition de la première (resp. deuxième) boule blanche.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
   Indication : *Penser dénombrement.*
2. On pose $D = Y - X$. Montrer que X et D ont la même loi. Les variables X et D sont-elles indépendantes ?
   Indication : *Calculer* $\mathbf{P}(X = k)$*, en utilisant la loi de* (X, Y)*.*
3. En déduire que $\mathbf{E}(Y) = 2\mathbf{E}(X)$ et $\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{\mathbf{V}(Y)}{2}$.

Exercice 4. Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $d\colon E \to E \quad f \mapsto f'$. On note $F = \mathrm{Vect}(\sin, \cos, \sinh, \cosh)$.

1. Justifier brièvement la valeur de $\dim F$ et que F est stable par d.

On note $\varphi = d_F$ l'endomorphisme de F induit par d.

2. Pour une base $\mathcal{B}$ bien choisie de F, donner $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Exercice 5. Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Pour $m \in [\![0, n-1]\!]$, on considère la variable $Z = \begin{cases} X_2 \text{ si } X_2 > m \\ X_1 \text{ sinon} \end{cases}$.

1. Rappeler la définition de l'espérance, et calculer l'espérance de X_1.
2. Déterminer la loi de Z.
   Indication : *Décrire l'évènement* $(Z = k)$*, en distinguant selon* $k > m$ *ou* $k \leqslant m$*.*

Exercice 6. Soient X_1, X_2 indépendantes de même lois, à valeurs > 0.

1. On suppose dans cette question que X_1 et X_2 suivent des lois uniformes sur $[\![1, 3]\!]$. Expliciter la loi de $\frac{X_1}{X_2}$.
2. Montrer que $\frac{X_1}{X_1+X_2}$ et $\frac{X_2}{X_1+X_2}$ suivent la même loi.
   Indication : *Les couples* (X_1, X_2) *et* (X_2, X_1) *ont la même loi. Pourquoi ?*
3. Qu'en déduire sur $\mathbf{E}\left(\frac{X_1}{X_1+X_2}\right)$?

Exercice 7. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes de même loi uniforme sur $\{\pm 1\}$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $Y_k = X_1 \ldots X_k$. Montrer que les variables $Y_1, \ldots, Y_n$ sont mutuellement indépendantes.
Indication : *Éventuellement : Traiter le cas* $n = 2$*.*

Exercice 8. Soit X une variable aléatoire réelle.

1. Montrer que $\mathbf{E}(|X|)^2 \leqslant \mathbf{E}(X^2)$. **Indication** : *Inégalité avec des carrés...*
2. Montrer que $\mathbf{E}(|X|)^2 \leqslant \mathbf{E}(X^2)\mathbf{P}(|X| > 0)$. **Indication** : *Écrire* $\mathbf{P}(|X| > 0)$ *comme l'espérance d'une VA.*

Exercice 9. ★ Soit σ_n une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$.

1. Soit L_n la longueur du cycle de σ_n contenant 1. Déterminer l'espérance de L_n.
   Indication : *Déterminer la loi de* L_n*. On trouve* $\frac{n+1}{2}$*.*
2. Quelle est la probabilité que 1 et 2 soient dans un même cycle de σ_n ?
   Indication : *Utiliser la question précédente.*

Exercice 10. ★ Soit $n \geqslant 1$ et X, Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Déterminer $\mathbf{P}(XY = 0)$.