Interro n°25

Exercice 1. Donner un exemple de trois entiers a, b, c premiers entre eux dans leur ensemble (c'est-à-dire $\text{pgcd}(a, b, c) = 1$), tels qu'aucune paire de ces entiers ne soient premiers entre eux.
Indication : *Utiliser trois nombres premiers :* $2, 3, 5$.

Exercice 2.

1. Démontrer que si H est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $H = \alpha\mathbb{Z}$.
   Indication : *Si $H \neq \{0\}$, introduire $\alpha = \min H \cap \mathbb{N}^*$. Justifier $\alpha\mathbb{Z} \subset H$, et pour l'inclusion réciproque, faire une division euclidienne.*

Cet entier α est unique, puisque l'égalité $H = \alpha\mathbb{Z}$ implique $\alpha = 0$ si $H = \{0\}$, et $\alpha = \min H \cap \mathbb{N}^*$ sinon.

2. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$, on considère l'unique entier $d \in \mathbb{N}$ tel que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$.
   (a) Montrer que d est un diviseur de a et de b.
   (b) Montrer que tout diviseur commun à a et b divise d.

Exercice 3. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Rappeler la formule donnant le déterminant d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On note $C = A + iB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $C' = A - iB$. Comparer $d = \det C$ et $d' = \det C'$, justifier.
3. Montrer que si $AB = BA$, alors $\det(A^2 + B^2) \geqslant 0$.

Exercice 4.

1. Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux et $c \in \mathbb{N}$. Montrer que $ab \mid c$ si et seulement si $a \mid c$ et $b \mid c$.
   Indication : *Identifier le sens facile. Pour l'autre, écrire la relation de Bézout, et la multiplier par c.*

Exercice 5. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \alpha \\ \alpha & 0 & & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de M.
2. Déterminer, en fonction de $\alpha \in \mathbb{C}$, le rang de M.
   Indication : *Il suffit de distinguer $\det M = 0$ ou non, il n'est pas utile d'expliciter les α dont on parle.*

Exercice 6.

1. Soit $a \in \mathbb{N}$. Montrer que si $n \mid m$, alors $a^n - 1 \mid a^m - 1$.
   Indication : *Utiliser une factorisation de $x^n - 1$*
2. Soit $n \geqslant 1$. Montrer que si $2^n - 1$ est un nombre premier, alors n est premier.

Exercice 7. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\text{Com}(AB) = \text{Com}(A)\,\text{Com}(B)$.
Indication : *Rappeler une formule sur la comatrice.*

Exercice 8. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

1. Justifier que le rang de M est égal au plus grand entier k tel que M admette une sous-matrice carrée de taille k inversible.
2. En déduire que les rangs de M vue comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ sont égaux.
3. ★ Soit p premier. On associe naturellement à la matrice M une matrice $\overline{M}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, obtenue en prenant la classe de chaque coefficient de M.
   Comparer le rang (sur $\mathbb{Q}$) de M à celui de $\overline{M}$ (sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$).
4. ★ Existe-t-il toujours p premier tel que le rang de M sur $\mathbb{Q}$ soit égale au rang de M sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

Exercice 9. ★ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leqslant 1$. Montrer que $|\det A| \leqslant 1$.

Exercice 10. ★

On rappelle qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ est inversible d'inverse dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det M = \pm 1$, et qu'on note $GL_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble de ces matrices. Soient n entiers $a_1, \ldots, a_n$.

1. Montrer que si $a_1, \ldots, a_n$ sont les coefficients de la première colonne d'une matrice de $GL_n(\mathbb{Z})$, alors ils sont premiers entre eux dans leur ensemble.
2. On appelle ici transvection l'opération consistant à retrancher à un des a_i une combinaison des autres à coefficients entiers. Par exemple $(a, b) \mapsto (a - bq, b)$, lorsque $n = 2$. Justifier que par une succession de transvections et de permutations, on peut transformer $(a_1, \ldots, a_n)$ en $(1, 0, \ldots, 0)$.
3. Montrer que si les a_i sont premiers dans leur ensemble, il existe une matrice $A \in GL_n(\mathbb{Z})$ qui admet $(a_1, \ldots, a_n)$ comme première colonne.
   Indication : *Il est clair que l'on peut trouver une matrirce $A \in GL_n(\mathbb{Z})$ de première colonne $(1, 0, \ldots, 0)$.*