Interro n°26

Exercice 1. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Exercice 2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ définie par $f(P) = P(X+2) + P(X) - 2P(X+1)$.

1. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **Indication** : $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\, e_3$.

Exercice 3. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. À quelle condition A et B sont-elles équivalentes ? Rappeler la définition, et une caractérisation simple.
2. ★ Montrer qu'il existe $U \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que UA soit une matrice de projection.

Exercice 4. Soit E un espace de dimension n et V un sous-espace vectoriel de E de dimension p. On note $\mathcal{V} = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid V \subset \mathrm{Ker}\, u\}$. Déterminer la dimension de $\mathcal{V}$.

Exercice 5.

1. Pour $X, Y \in \mathbb{K}^n$, dessiner la matrice $M = XY^T$, préciser son rang et son image.
2. Montrer que toute matrice M de rang 1 est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ * & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à la matrice A.

1. Déterminer $\mathrm{rg}(f)$, $\ker f$ et $\mathrm{Im}\, f$.

> On admet que les espaces $\ker(f^2)$ et $\ker(f - \mathrm{id})^2$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$ et que $\big(e_1 = (1,1,0,0), e_2 = (0,1,1,0)\big)$ et $\big(e_3 = (1,0,0,0), e_4 = (0,0,1,1)\big)$ forment des bases de ces deux espaces.

2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est égale à $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Indication : *On pourra calculer Ae_i.*
3. Calculer T^n pour tout n de $\mathbb{N}^*$. Expliquer comment en déduire A^n.

Exercice 7. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $\mathrm{rang}\, AB \leqslant \min(\mathrm{rang}\, A, \mathrm{rang}\, B)$.
2. Montrer que $\mathrm{rang}(A+B) \leqslant \mathrm{rang}\, A + \mathrm{rang}\, B$, puis en déduire que $\mathrm{rang}(A+B) \geqslant |\,\mathrm{rang}\, A - \mathrm{rang}\, B|$.
3. Montrer que si $AB = A + B$ alors $\mathrm{rang}\, A = \mathrm{rang}\, B$.

Exercice 8. On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et la suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k$.

1. On note $V_n = (v_0, \dots, v_n)$ et $U_n = (u_0, \dots, u_n)$, interprétés comme des vecteurs colonnes. Expliciter une matrice M tel que $V_n = MU_n$.
2. Déterminer une expression explicite de u_n en fonction des v_k, pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

Exercice 9.

1. Proposer une représentation naïve d'une file. Pour cette représentation, donner les complexité des opérations `enfile` et `defile`. Implémenter une fonction `peek` qui prend en argument la file et renvoie le premier élément de la file, ou `None` si elle est vide, sans le retirer de la file.
2. ★ Les nombres de Hamming sont les entiers de la forme $2^a 3^b 5^c$. On veut écrire une fonction `hamming` qui prend un entier n en argument et renvoie la liste des entiers de Hamming $\leqslant n$, dans un ordre croissant, avec une complexité linéaire en la longueur de la liste renvoyée.
   Indication : *Maintenir trois files `f2`, `f3` et `f5`.*

Exercice 10. Soit G un sous-groupe fini de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$, on note $G = \{A_1, \dots, A_p\}$. L'objectif est de montrer que $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{tr}(A_i)$ est un multiple entier de p.

1. Soit $M = \sum_{i=1}^{p} A_i$, montrer que $M^2 = pM$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M. Montrer que l'on peut écrire $f = \lambda u$, où u est un projecteur et λ une constante à déterminer.
2. Conclure.

Exercice 11. ★ Soit $n \geqslant 3$. caractériser les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ pour lesquels il existe une base dans laquelle u est représenté par une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, où $M \in \mathcal{M}_{n-2}(\mathbb{K})$.