Interro n°26

Exercice 1. Soient X_1, X_2 deux variables indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, retrouver une expression de $P(X_1 + X_2 = n)$ en fonction des lois de X_1 et X_2.

Exercice 2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers de $[\![1, n]\!]$ qui sont premiers avec n.

1. Pour p premier, donner la valeur de $\varphi(p)$, puis de $\varphi(p^\alpha)$. Justifier.
2. ★ On considère les fractions $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}$, et on réduit chacune sous forme irréductible. Pour d divisant n, combien reste-t-il de fractions avec d comme dénominateur ? En déduire la valeur de $\sum_{d|n} \varphi(d)$.

Exercice 3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On note $D = \mathrm{pgcd}(P, P')$.

1. Pour $P = (X-1)^3(X-2)^4$, calculer P' et expliciter D.
2. Exprimer $\deg D$ en fonction de $n = \deg P$ et du nombre r de racines distinctes de P. Justifier.
   Indication : *On trouve* $\deg D = \deg P - r$.
3. En déduire quels sont les polynômes unitaires $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P' \mid P$.

Exercice 4. Soient X, Y deux variables indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, avec $p \in \,]0,1[$. On pose $U = X + Y$ et $V = X - Y$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V).
2. Les variables U, V sont-elles indépendantes ? Justifier soigneusement.

Exercice 5.

1. Montrer que $n+1$ divise $n^3 + 1$.
   Indication : *Factorisation de* $a^{2n+1} + b^{2n+1}$.
2. Déterminer les entiers naturels n tels que $n+1$ divise $n^3 + 4$.

Exercice 6.

1. Soit p un nombre premier congru à 3 modulo 4. Que vaut $(-1)^{\frac{p-1}{2}}$ modulo p ?
   En déduire que -1 n'est pas un carré modulo p, c'est-à-dire qu'il n'existe pas $a \in \mathbb{Z}$ tel que $-1 \equiv a^2 [p]$.
2. Soit $N \in \mathbb{N}$ pair. Montrer que $N^2 + 1$ n'a que des facteurs premiers congrus à 1 modulo 4.
3. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 4.

Exercice 7. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note F_P l'ensemble des polynômes multiples de P appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$

1. Quelle est la dimension de F_P, en fonction de $\deg P$?
2. Si $\deg P + \deg Q = n + 1$ et $P \wedge Q = 1$, montrer que $\mathbb{R}_n[X] = F_P \oplus F_Q$

Exercice 8. Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Pour $m \in [\![0, n-1]\!]$, on considère la variable $Z = \begin{cases} X_2 \text{ si } X_2 > m \\ X_1 \text{ sinon} \end{cases}$.

1. Rappeler la définition de l'espérance, et calculer l'espérance de X_1.
2. Déterminer la loi de Z.
   Indication : *Décrire l'évènement $(Z = k)$, en distinguant selon $k > m$ ou $k \leqslant m$.*
3. Espérance de Z.

Exercice 9. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables indépendantes de même loi uniforme sur $\{\pm 1\}$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $Y_k = X_1 \dots X_k$. Montrer que les variables $Y_1, \dots, Y_n$ sont mutuellement indépendantes.
Indication : *Éventuellement : Traiter le cas $n = 2$.*

Exercice 10. Soit $n \geqslant 2$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$, avec $p \in \,]0,1[$. On note $C = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $M = CC^T$.

1. Déterminer les lois de $\det M$, $\mathrm{rang}\, M$ et $\mathrm{Tr}\, M$.
2. Quelle est la probabilité que M soit une matrice de projection ?

Exercice 11. ★ Deux joueurs A et B lancent une pièce. Les règles de gain sont les suivantes : pile rapporte 5 euros et face 4 euros. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, chacun des joueurs effectue $9n$ lancers indépendants ; on note A_n (resp. B_n) la variable aleatoire donnant le gain du joueur A (resp. B).

1. Trouver un équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$, de $P(A_n = B_n)$.
   Indication : *Noter A_n^*, B_n^* le nombre de Pile obtenus. Utiliser une propriété de symétrie.*
2. Montrer que $P(A_n \geqslant B_n) \geqslant \frac{1}{2}$. Vers quoi tend $P(A_n < B_n)$?

Exercice 12. ★

1. Montrer que pour n impair, n divise $\sum_{k=1}^{n-1} k^n$.
2. Trouver les entiers $n \geqslant 1$ pour lesquels $n \mid 1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n$
   Indication : *Travailler modulo un diviseur judicieux, et appliquer utiliser le théorème d'Euler.*