Interro n°27

Les questions 9.1 et 10.1 sont proches du cours.

Exercice 1. Donner trois définitions équivalentes du caractère alterné d'une forme n-linéaire $f : E^n \to \mathbb{K}$.

Exercice 2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Rappeler la formule donnant le déterminant d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $C = A + iB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $C' = A - iB = \overline{C}$. Comparer $d = \det C$ et $d' = \det C'$, justifier.
3. ★ Montrer que si $AB = BA$, alors $\det(A^2 + B^2) \geqslant 0$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le déterminant $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$.

1. Calculer D_1, D_2 et D_3.
2. Pour $n \geqslant 3$, en effectuant l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 + L_3$, déterminer la valeur de D_n.
   Indication : *On obtient une relation de récurrence simple.*

Exercice 4. Résoudre $\begin{vmatrix} 1-x & 2 & -2 \\ 2 & 1-x & -2 \\ 2 & 2 & -3-x \end{vmatrix} = 0$ **Indication** : *Commencer par* $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$.

Exercice 5.

1. Rappeler la définition de la comatrice.

On note $GL_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ inversibles telles que $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

2. Montrer qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ est dans $GL_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si son déterminant vaut ± 1.
   Indication : *Pour une des implications écrire* $A\,A^{-1} = I_n$*, pour l'autre, utiliser la comatrice.*

Exercice 6. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \alpha \\ \alpha & 0 & & 1 \end{pmatrix}$.

1. Énoncer le résultat de développement suivant une ligne ou une colonne (au choix) du déterminant d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (définir les objets).
2. Calculer le déterminant de M. **Indication** : *On trouve* $1 + (-1)^{n+1}\alpha^n$.
3. Déterminer, en fonction de $\alpha \in \mathbb{C}$, le rang de M.
   Indication : *Il suffit de distinguer* $\det M = 0$ *ou non, il n'est pas utile d'expliciter les* α *dont on parle.*

Exercice 7. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la matrice $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ définie par : $M = \begin{pmatrix} aI_n & bI_n \\ cI_n & dI_n \end{pmatrix}$.

1. Que vaut $\det(M)$ dans les cas (i) : $a = d = -1$ et $c = b = 0$ et (ii) : $a = b = c = d = 1$
2. Calculer $\det(M)$ dans le cas où $a \neq 0$, puis dans le cas général.
   Indication : *Opérations sur les lignes ou changement de base.*

Exercice 8. Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $D \in GL_n(\mathbb{R})$.

1. Trouver $X, Y, Z, T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & X \\ 0 & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z & 0 \\ T & I_n \end{pmatrix}$.
2. En déduire que si C et D commutent, $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.

Exercice 9. Soient $x_0, \dots, x_n$ des réels.

1. Rappeler la valeur du déterminant de Vandermonde $V(x_0, \dots, x_n) = \det(x_j^i)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$. À quelle condition est-il non nul ?
2. Soient $P_0, P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}[X]$ tels que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $\deg P_i = i$. On note a_i le coefficient dominant de P_i. On pose $A = (P_i(j))_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice L triangulaire inférieure telle que $A = L \cdot V(0, 1, \dots, n)$.
3. En déduire la valeur de $\det(A)$ en fonction des a_i.

Exercice 10. Déterminant de Cauchy. Soient $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$. On considère le déterminant Δ_n de la matrice $\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

1. On suppose que les b_i sont deux à deux distincts. Décomposer en éléments simples $F(X) = \frac{(X-a_1)\dots(X-a_{n-1})}{(X+b_1)\dots(X+b_n)}$.

On note α_n le coefficient du pôle $-b_n$.

2. En déduire que $\Delta_n = \frac{F(a_n)}{\alpha_n}\Delta_{n-1}$.
3. Donner une expression explicite de Δ_n.

Exercice 11. ★ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leqslant 1$. Montrer que $|\det A| \leqslant 1$.

Exercice 12. ★ Soient n entiers $a_1, \ldots, a_n$.

1. Montrer que si $a_1, \ldots, a_n$ sont les coefficients de la première colonne d'une matrice de $GL_n(\mathbb{Z})$, alors ils sont premiers entre eux dans leur ensemble.
2. On appelle ici transvection l'opération consistant à retrancher à un des a_i une combinaison des autres à coefficients entiers. Par exemple $(a, b) \mapsto (a - bq, b)$, lorsque $n = 2$. Justifier que par une succession de transvections et de permutations, on peut transformer $(a_1, \ldots, a_n)$ en $(1, 0, \ldots, 0)$.
3. Montrer que si les a_i sont premiers dans leur ensemble, il existe une matrice $A \in GL_n(\mathbb{Z})$ qui admet $(a_1, \ldots, a_n)$ comme première colonne.
   Indication : *Il est clair que l'on peut trouver une matrirce* $A \in GL_n(\mathbb{Z})$ *de première colonne* $(1, 0, \ldots, 0)$.