Interro n°27

Exercice 1. Montrer que $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^T B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Énoncer et démontrer le théorème de Pythagore, pour n vecteurs d'un espace préhilbertien.

Exercice 3.

1. Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz, dans un espace préhilbertien. Quel est le cas d'égalité ?
   On admet que l'inégalité de Cauchy-Schwarz reste valable pour le crochet $\langle X, Y\rangle = E(XY)$, sur l'ensemble des variables aléatoires sur un espace probabilisé (Ω, P).
2. On définit le coefficient de corrélation de deux variables aléatoires de variances non nulles comme $\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\rho_X \rho_Y}$. Montrer que $-1 \leqslant \rho_{X,Y} \leqslant 1$.
3. Donner sans justifier une CNS pour que $|\rho_{X,Y}| = 1$.

Exercice 4.

1. Énoncer l'inégalité de Markov.
2. Énoncer et démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables indépendantes de même loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$ et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Donner $E(\frac{S_n}{n})$ et $V(\frac{S_n}{n})$ et en déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant \frac{1}{2} + \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Exercice 5. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi donnée par $P(X_1 = 1) = p$ et $P(X_1 = 2) = 1 - p$. On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et, pour $k \in \mathbb{N}$, $Y_k = \min\{n \mid S_n \geqslant k\}$. On admet que, pour tout $k \geqslant 2$ et tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a $P(Y_k = m) = pP(Y_{k-1} = m-1) + (1-p)P(Y_{k-2} = m-1)$.

1. Montrer que la suite $u_k = E(Y_k)$ vérifie $\forall k \geqslant 2$, $u_k = pu_{k-1} + (1-p)u_{k-2} + 1$.
2. ★ En déduire $E(Y_k)$.

Exercice 6. Soit E un espace préhilbertien et $x, y \in E$. Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R}$, $\|x + ty\| \geqslant \|x\|$.

Exercice 7. ★ Inégalité de Cantelli.

Soit X, Y deux variables aléatoires réelles.

1. Montrer que $E(|X|)^2 \leqslant E(X^2)$, et que $E(|X|)^2 \leqslant E(X^2)P(|X| > 0)$.
   Indication : *Exprimer $P(|X| > 0)$ comme l'espérance d'une variable aléatoire, et utiliser Cauchy-Schwarz.*
2. On suppose que $E(Y) \geqslant 0$ et $E(Y^2) \neq 0$. En appliquant la question précédente à une VA judicieuse, montrer que $P(Y > 0) \geqslant \frac{E(Y)^2}{E(Y^2)}$.
3. Soit $\varepsilon > 0$, montrer que $P(X - E(X) \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{V(X)+\varepsilon^2}$. En déduire que $P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2\frac{V(X)}{V(X)+\varepsilon^2}$.