Interro n°28

En priorité : jusqu'au 12.1.

Exercice 1. Sur $E = \mathcal{C}^0([0,\pi],\mathbb{R})$, montrer soigneusement que $\langle f, g\rangle = \int_0^\pi f(t)g(t)\sin t\,dt$ est un produit scalaire.

Exercice 2. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on définit $\langle P, Q\rangle = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1)$.

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est défini positif.
2. Montrer que $(X-1)^2$ est orthogonal à $\mathbb{R}_1[X]$.
3. Donner une BON de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 3. Déterminer la partie entière de $R = \frac{X^4+2X^3+1}{X^2+X+1}$.

Exercice 4. Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F^2 = X$.

Exercice 5. Soit $F = \operatorname{Vect} a, b$ un sous-espace vectoriel de dimension 2 d'un espace euclidien.

1. Montrer qu'il existe exactement deux vecteurs $e_2, e_2' \in F$ unitaires et orthogonaux à a.
   Indication : *F est un espace euclidien, de dim 2.*
2. On pose $e_1 = \frac{a}{\|a\|}$, et pour $\theta \in [0, 2\pi[$, $f_\theta = e_1\cos\theta + e_2\sin\theta$. Montrer que $\theta \mapsto f_\theta$ réalise une bijection de $[0, 2\pi[$ dans l'ensemble des vecteurs unitaires de F.

Exercice 6. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $f \in E$ strictement positive.

1. Énoncer une inégalité de CS dans E.
2. Montrer que $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} \geqslant \frac{1}{\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t}$.

Exercice 7. Déterminer une base orthonormale de $F = \operatorname{Vect}\left(I_2, M = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)$ pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Indication : *Il peut être judicieux de commencer par réordonner la famille, avant d'appliquer le procédé de GS.*

Exercice 8. Soit E un espace préhilbertien et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$
2. ★ Si E est euclidien, montrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$

Exercice 9. On considère $I = \inf\limits_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (t - a\sqrt{t} - b)^2\,\mathrm{d}t$.

1. Interpréter I en termes de la distance d'un vecteur φ à un sev F de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, pour le ps usuel.
   On admet que la famille $(e_1 = \tilde{1}, e_2 \colon t \mapsto 3\sqrt{2}(\sqrt{t} - 2/3))$ forme une BON de F.
2. Déterminer le projeté orthogonal $p_F(\varphi)$ de φ sur F.
3. Montrer que $\|\varphi\|^2 = \|p_F(\varphi)\|^2 + \|\varphi - p_F(\varphi)\|^2$.
4. Donner une expression de I.

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel euclidien, H_1, H_2 deux hyperplans de E et a_1, a_2 deux vecteurs non nuls, avec $a_1 \perp H_1$ et $a_2 \perp H_2$.

1. Justifier que H_1 et $\operatorname{Vect} a_1$ sont supplémentaires.
2. On note s_i la symétrie par rapport à H_i parallèlement à $\operatorname{Vect} a_i$.
   (a) Que valent $\ker(s_i - \mathrm{Id})$ et $\ker(s_i + \mathrm{Id})$?
   (b) ★ À quelle condition s_1 et s_2 commutent-elles ?
   Indication : *Si s_1 et s_2 commutent, s_2 préserve* $\ker(s_1 + \mathrm{Id})$.

Exercice 11.

1. Soit $a = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Déterminer l'expression de la projection orthogonale de $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ sur $\operatorname{Vect} a$.
2. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$.

Exercice 12. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, muni de $\langle A, B\rangle = \operatorname{Tr}(A^T B)$.

1. Rappeler, ou retrouver, l'expression de $\|A\|$.
2. Montrer que $\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$.
   Indication : *Utiliser l'inégalité de CS.*

Exercice 13. Soit $f \colon E \to E$ une application non nécessairement linéaire qui préserve la norme, c'est-à-dire vérifiant $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$.

1. Montrer que f préserve le produit scalaire, c'est-à-dire $\forall x, y \in E$, $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
2. Soient $x, y \in E$. Montrer que $f(x+y) - f(x) - f(y) \perp (\operatorname{Im} f)$.
3. Montrer que f est linéaire.

Exercice 14. Soit E un espace euclidien, et p, q des projecteurs orthogonaux. Soit $x \in E$ tel que $p(x) = -q(x)$. Montrer que $p(x) = q(x) = 0$.

Exercice 15. ★ Soit E un espace euclidien. Montrer que deux sevs F, G de E sont supplémentaires orthogonaux si et seulement si $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = d(x,F)^2 + d(x,G)^2$.