Interro n°29

Exercice 1.

1. À quelle condition une fonction $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est-elle continue par morceaux ?
2. Montrer que toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b])$ est bornée.

Exercice 2. Déterminer la limite éventuelle, quand $n \to +\infty$, de $\frac{1}{n}(\sum_{k=0}^{n} \sin \frac{k\pi}{n})$

Exercice 3. Soit $P = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5$.

1. Expliquer comment trouver la factorisation $P = (1+X)(1+X+X^2)(1-X+X^2)$.
2. Donner la forme de la décomposition en éléments simples de $F = \frac{X}{1+X+X^2+X^3+X^4+X^5}$ dans $\mathbb{R}(X)$. Justifier brièvement.
3. Déterminer un des coefficients, ainsi deux autres relations simples entre les coefficients, par des méthodes différentes.

Exercice 4. Décomposer en éléments simples $\frac{X^2-2}{X^2(X-1)}$ dans $\mathbb{R}(X)$

Exercice 5. À l'aide d'un changement de variable, calculer $\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t+2)\sqrt{1+t}}$.

Exercice 6. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{x^n \cos(\pi x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. Montrer que (u_n) est bornée, puis que $u_n \to 0$.

Exercice 7.

1. Soit $P = \prod (X - a_i)^{m_i}$ un polynôme scindé. Donner sans justifier la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$.
2. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1-\omega^k}$, où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

   Indication : *Expliciter un polynôme dont les racines sont les $n-1$ nombres ω^k, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.*

Exercice 8. Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, continue en 0, vérifiant $\forall t \in [0,1]$, $|f(t)| \leqslant \frac{1}{2}$ et $f(0) = 0$.

1. Soit $0 < \varepsilon < 1$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\left|\int_{1-\varepsilon}^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
2. On veut montrer que $\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
   (a) Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ montrer qu'il existe n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $|f\big((1-\varepsilon)^n\big)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
   Puis qu'il existe n_0 tel que
   $$\forall n \geqslant n_0,\ \forall t \in [0, 1-\varepsilon], \quad |f(t^n)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$
   (b) Conclure.

Exercice 9. Approximation par un trapèze. Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{R})$.

1. On suppose que $f(a) = f(b) = 0$.
   (a) On note $m = \inf f''$ et $M = \sup f''$, $g_m = \frac{m}{2}(x-a)(x-b)$ et $g_M = \frac{M}{2}(x-a)(x-b)$. Montrer que $\forall x \in [a,b]$, $g_M \leqslant f \leqslant g_m$.
   (b) En déduire que $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sup |f''| \frac{(b-a)^3}{12}$.
2. En déduire que dans le cas général, $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}\right| \leqslant \sup |f''| \frac{(b-a)^3}{12}$.

Exercice 10. Déterminant de Cauchy. Soient $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$. On considère le déterminant Δ_n de la matrice $\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

1. On suppose que les b_i sont deux à deux distincts. Décomposer en éléments simples $F(X) = \frac{(X-a_1)\dots(X-a_{n-1})}{(X+b_1)\dots(X+b_n)}$.
   On note α_n le coefficient du pôle $-b_n$.
2. En déduire que $\Delta_n = \frac{F(a_n)}{\alpha_n}\Delta_{n-1}$.
3. Donner une expression explicite de Δ_n.

Exercice 11. ★ Soit f une fonction continue strictement positive sur $[a,b]$.

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ il existe une unique subdivision $(x_0, \dots, x_n)$ de $[a,b]$ telle que pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$,
   $$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$
2. Exprimer la limite, quand n tend vers $+\infty$ de $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} x_k$, en fonction de f.

Exercice 12. ★ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n scindé sur $\mathbb{R}$,

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P'(x)^2 \geqslant P(x)P''(x)$.
   Indication : *Après avoir divisé par …, reconnaître une dérivée.*
2. Montrer que $(n-1)P'^2 \geqslant nPP''$.
3. Déduire de 1 que les coefficients de P vérifient $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $ka_k^2 \leqslant (k+1)a_{k-1}a_{k+1}$.

Exercice 13. ★ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P([0,1]) \subset [0,1]$ et $\forall f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, $\int_0^1 f(P(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que la relation est également valable pour $f = \mathbb{1}_{[c,d]}$.