Interro n°30

Exercice 1.

1. À quelle condition une fonction $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est-elle continue par morceaux ?
2. Montrer que toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b])$ est bornée.

Exercice 2.

1. Montrer que $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$.
2. Montrer que $\frac{xy}{x^2+y^2}$ n'admet pas de limite, quand $(x,y) \to (0,0)$.

Exercice 3.

1. Montrer que si $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, la boule ouverte euclidienne $B_2(a,r)$ est convexe.
   Indication : *Rappeler la définition de $B_2(a,r)$ et de la convexité.*
2. Montrer que l'intersection de deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert.
   Indication : *Rappeler la définition d'un ouvert.*

Exercice 4. Pour coder un entier $N \in [\![-2^{n-1}, 2^{n-1}-1]\!]$ en complément à deux sur n bits :

(i) Si $0 \leqslant N \leqslant 2^{n-1}-1$ on utilise sa représentation binaire usuelle sur n bits. Elle commence par un 0.

(ii) Si $-2^{n-1} \leqslant N < 0$, on utilise la représentation binaire sur n bits de $2^n + N = 2^n - |N| \in [\![2^{n-1}, 2^n - 1]\!]$. Celle-ci commence par 1.

1. Déterminer l'encodage en complément à 2 sur 8 bits de 24 et -20.
2. Déterminer les entiers dont le codage en complément à 2 sur 8 bits est `10101010` et `01010101`.

Exercice 5. Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, continue en 0, vérifiant $\forall t \in [0,1]$, $|f(t)| \leqslant \frac{1}{2}$ et $f(0) = 0$. On veut montrer que $\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ montrer qu'il existe n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $|f\big((1-\varepsilon)^n\big)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
   Puis qu'il existe n_0 tel que
   $$\forall n \geqslant n_0,\ \forall t \in [0, 1-\varepsilon], \quad |f(t^n)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$
2. Conclure.
   Indication : *Découper l'intégrale.*

Exercice 6. Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}_+^*$ continue et $y = (y_1, \ldots, y_p) \in (\mathbb{R}_+^*)^p$. Pour $\alpha > 0$, on définit

$$\|f\|_\alpha = \left(\int_0^1 f(t)^\alpha\right)^{1/\alpha} \qquad \text{et} \qquad \|y\|_\alpha = \left(\sum_{k=1}^p y_i^\alpha\right)^{1/\alpha}$$

1. À l'aide d'un encadrement, montrer que $\|y\|_\alpha \xrightarrow[\alpha\to+\infty]{} \max y_i$.
2. Montrer que $\|f\|_\alpha \xrightarrow[\alpha\to+\infty]{} \sup f$.
3. Déterminer un équivalent, quand $\alpha \to 0^+$, de $\|y\|_\alpha$.

Exercice 7.

1. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$. On pose $f_p(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t^p}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $f_p(x) = O_{+\infty}(\frac{e^x}{x^{p-1}})$.
   Indication : *Découper l'intégrale en $f_p(x) = \int_1^{x/2} \frac{e^t}{t^p}\,\mathrm{d}t + \int_{x/2}^x \frac{e^t}{t^p}\,\mathrm{d}t$, ou faire une IPP.*
2. À l'aide d'intégrations par parties, déterminer un équivalent de $f_p(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 8. ★ Convergence de

1. $v_n = \sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^3}\right)$.
2. $u_n = \sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.
   Indication : $\sin x = x + O_0(x^3)$.

Exercice 9. ★ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P([0,1]) \subset [0,1]$ et $\forall f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, $\int_0^1 f(P(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que la relation est également valable pour $f = \mathbb{1}_{[c,d]}$.