Interro n°31

Exercice 1.

1. Donner deux formes du $DL_1(a)$ d'une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Pour $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, dériver $g\colon t \mapsto f(t^2, t^3)$.

Exercice 2. Soit U un ouvert convexe, $f\colon U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a, b \in U$.

1. Montrer que $f(b) - f(a) = \int_0^1 \langle b-a, \nabla f(a + t(b-a))\rangle \,\mathrm{d}t$.
2. En déduire que $|f(b) - f(a)| \leqslant \|b-a\|_2 \sup_U \|\nabla f\|_2$.

Exercice 3.

1. Soit $A \subset \mathbb{R}^2$. Rappeler la définition de A fermé.
2. Montrer que $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ est un fermé.

Exercice 4. On pose $\Delta = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Soit $f\colon \Delta \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $(E)\colon y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

1. Interpréter géométriquement (E) en considérant, en $M = (x,y)$, les vecteurs $\operatorname{grad} f(M)$ et $\overrightarrow{OM}$.
2. On pose $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Expliciter $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}$, puis montrer qu'il existe $\varphi\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x, y \in \Delta$, $f(x,y) = \varphi(\sqrt{x^2+y^2})$.

Exercice 5.

1. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ dérivable. Rappeler l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x_0 \in I$.

> On considère une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On admet que la surface $\mathcal{S}$ d'équation $z = f(x,y)$ possède au point $M_0(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ un plan tangent d'équation :
>
> $$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

2. Donner un vecteur normal $\vec{n}$ à ce plan en M_0.
3. Soit $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ une courbe dérivable $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ tracée sur $\mathcal{S}$, c'est-à-dire vérifiant $\forall t$, $\gamma(t) \in \mathcal{S}$. Vérifier que pour tout t, le vecteur $\gamma'(t)$ est orthogonal à $\vec{n}$ au point $\gamma(t)$.

Exercice 6. Soit $f\colon (x,y) \mapsto \frac{xy^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

1. Montrer que $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$.
2. Justifier que f est de classe C^1 sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, et donner ses dérivées partielles
3. Montrer que f possède des dérivées partielles en $(0,0)$.
4. Montrer très brièvement que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7. Soit $C = \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \mid x + y \leqslant 2\}$ et $f\colon (x,y) \mapsto x^2y^2(x^2+y^2)$.

1. Représenter C.
2. Justifier que f admet un maximum sur C.
3. Déterminer les points critiques de f.
4. Déterminer le maximum de f sur C

Exercice 8. On représente un graphe pondéré dont l'ensemble des sommets est $[\![0, n-1]\!]$ par une matrice `M` telle que `M[i][j]` soit le poids d'un arc $i \to j$, ou `None` s'il n'y a pas d'arcs.

1. Écrire une fonction qui prend en argument `M` et une liste de sommets `l` représentant un chemin dans le graphe, et qui renvoie le poids du chemin, ou `None` si ce n'est pas un chemin (s'il manque un arc entre un sommet `l[i]` et `l[i+1]`)
2. ★ Que renvoie l'extrait suivant ? Énoncer un invariant de la boucle extérieure.

```python
def mystere(M, s0): # M est un graphe pondéré, s0 est un sommet
    n = len(M)
    d = [10 ** 9] * n # On considérera que 10 ** 9 est l'infini
    d[s0] = 0
    for _ in range(n):
        for k in range(n):
            for l in range(n):
                if M[k][l] != None:
                    d[l] = min(d[l], d[k] + M[k][l])
    return d
```

Exercice 9. ★ Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose $g(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{sinon.} \end{cases}$ Montrer que g est continue.

Exercice 10. ★ **Preuve différentielle du théorème spectral**. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $h\colon X \in \mathbb{R}^n \backslash \{\vec{0}\} \mapsto \frac{\langle SX, X\rangle}{\|X\|^2}$.

1. Montrer que h admet un maximum et un minimum.
   Indication : *Que dire de $h(\lambda X)$?*
2. Justifier que h est $\mathcal{C}^1$ et montrer que $\nabla h(X) = 2\frac{SX}{\|X\|^2} - 2\frac{\langle SX, X\rangle X}{\|X\|^4}$.
   Indication : *Pour expliciter le gradient, utiliser l'unicité du développement limité : considérer $h(X+H)$ et en faire un développement limité quand $H \to \vec{0}$, qui permet d'identifier le gradient. On a $\langle SX, H\rangle = \langle X, SH\rangle$, car S symétrique.*
3. En déduire que S admet une valeur propre : il existe $X \neq \vec{0}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $SX = \lambda X$.

Exercice 11. ★

1. On considère deux points A, B distincts du cercle unité, et l'application f qui à un point C du cercle associe $AC + BC$. Déterminer les extrema locaux de f.
2. On considère un entier $n \geqslant 3$ et une liste croissante $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ à termes dans $[0, 2\pi]$. Déterminer la valeur maximale possible pour le périmètre du polygone de sommets $e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}$ (dans cet ordre).