Interro n°1

Merci de rédiger autant que possible les exercices dans l'ordre sur votre copie, quitte à laisser de l'espace quand vous en sautez un.

Pour cette interro, les éléments de rédaction corrects et judicieux sont pris en compte dans la notation, même si la démonstration n'aboutie pas.

Les questions ★ sont a priori à sauter en premier lieu. Les exercices ★ à ne traiter qu'en dernier.

Gérer votre temps pour aborder les 9 premiers exercices au moins.

AMT **Exercice 1** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Écrire les propriétés suivantes de manière formelle, puis leur négation.

1. f est majorée.
2. f s'annule au moins deux fois sur $\mathbb{R}$.
3. (u_n) est strictement positive APCR.
4. $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

ZEC **Exercice 2** Pour $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, on considère l'implication $(\mathcal{P}_{x,y})$ portant sur $x, y \in \mathbb{R}$ et l'assertion $(\mathcal{P})$:

$$(\mathcal{P}_{x,y})\colon y \geqslant x+1 \Rightarrow \big(f(y) \geqslant f(x)+1 \text{ ou } f(y) \leqslant f(x)-1\big) \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{P})\colon \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \mathcal{P}_{x,y}$$

1. Écrire la contraposée l'implication $(\mathcal{P}_{x,y})$.
2. Simplifier la négation de $(\mathcal{P})$.
3. Donner, sans justifier, une fonction f_1 vérifiant $(\mathcal{P})$ et une fonction f_2 vérifiant sa négation.
4. ★ On note $(\mathcal{Q}_{x,y})$ la réciproque de $(\mathcal{P}_{x,y})$ et $(\mathcal{Q})\colon \forall x, \forall y, \mathcal{Q}_{x,y}$. Montrer que si f vérifie $(\mathcal{Q})$ alors $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(y)| < 1$.

NCB **Exercice 3**

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, quels sont les restes des divisions euclidiennes de $(3k+1)^2$ et $(3k+2)^2$ par 3 ?
2. En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$, $3 \mid n$ si et seulement si $3 \mid n^2$.
3. Montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

ZL2 **Exercice 4**

1. Énoncer le théorème de la division euclidienne.
2. Démontrer l'unicité.

MBZ **Exercice 5** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $u_0 = 0$, $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n3^n$.

GME **Exercice 6** Quelles sont les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $(*)\colon \forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) - f(x-y) = f(x) - f(y)$?

HZU **Exercice 7**

1. Montrer que le produit de deux suites bornées est une suite bornée.
2. Que dire du produit de deux suites majorées ? Justifier.

8I1 **Exercice 8** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle. Montrer l'équivalence entre

(i) $\exists a > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant an$.

(ii) $\exists a > 0, \exists b > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant an + b$.

5J3 **Exercice 9**

1. Montrer que pour $x_1, x_2 \geqslant 1$, $x_1 + x_2 \leqslant 1 + x_1 x_2$.
   Indication : *Manipuler par équivalences et factoriser.*
2. Soit $n \geqslant 1$ et $x_1, \dots, x_n \geqslant 1$. Montrer que $x_1 + \dots + x_n \leqslant (n-1) + x_1 \dots x_n$.
   Indication : *Traiter le cas* $n = 2$

1S4 **Exercice 10** Pour $k \geqslant 1$, on note u_k le plus grand diviseur impair de k. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{2n} = n^2$.

9VH **Exercice 11** ★ Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ est irrationnel.

33Z **Exercice 12** ★ **Une interversion de quantificateurs**. On colorie le plan $\mathbb{R}^2$ avec deux couleurs.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, il existe deux points du plan de la même couleur à distance x l'un de l'autre.
   Indication : *Considérer un triangle particulier.*
2. Montrer qu'il existe une couleur telle que pour tout $x > 0$, il existe deux points du plan de cette couleur à distance x l'un de l'autre.
   Indication : *Si une couleur c ne réalise pas une distance d, considérer un cercle de rayon d autour d'un point de couleur c.*

RBZ **Exercice 13** ★ Soit $A = \mathbb{Q} \backslash \{-1, 0, 1\}$ et $f\colon x \mapsto x - \frac{1}{x}$.

1. Montrer que $f(A) \subset A$, c'est-à-dire $\forall x \in A,\ f(x) \in A$.
2. Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Montrer que $a^2 - b^2$ et ab sont premiers entre eux.
3. Soit $x \in A$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que (u_n) n'est pas périodique.