

Interro n°2

Traiter en priorité les exercices 1 à 9.

7YU **Exercice 1** Soit $f: X \rightarrow Y$, $A \subset X$ et $B \subset Y$.

1. Donner la définition ensembliste de $f^{-1}(B)$ et pour $y \in Y$, compléter l'équivalence suivante par une définition formelle : $y \in f(A) \Leftrightarrow \dots$
2. Comparer pour l'inclusion $f(f^{-1}(B))$ et B . Justifier l'inclusion correcte.

08X **Exercice 2** Soit $f: X \rightarrow Y$ et $g: Y \rightarrow Z$.

1. Donner les définitions formelles de f injective et f surjective.
2. Montrer que si g et f sont injectives $g \circ f$ est injective.
3. Montrer que si g et f sont surjectives $g \circ f$ est surjective.

TI1 **Exercice 3** Soit $h: x \mapsto \ln(1 + \sqrt{x})$.

1. Montrer que la composée de deux fonctions strictement croissantes $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement croissante.
2. Montrer que h réalise une bijection de \mathbb{R}_+ sur un intervalle I à expliciter.
3. Déterminer une expression de la réciproque $h^{-1}: I \rightarrow \mathbb{R}_+$.

1LE **Exercice 4** Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$.

1. Rappeler deux définitions de \mathbb{U}_n .
2. Montrer que si $m \mid n$, alors $\mathbb{U}_m \subset \mathbb{U}_n$.
3. Montrer la réciproque.
Indication : Si $\mathbb{U}_m \subset \mathbb{U}_n$, alors en particulier, $e^{2i\pi/m} \in \mathbb{U}_n$.
4. ★ Montrer que $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n = \{1\} \Leftrightarrow n \wedge m = 1$.

Indication : Pour un sens, on pourra écrire une relation de Bézout.

GGT **Exercice 5** On considère les applications de \mathbb{N} dans \mathbb{N} définies par $f: n \mapsto 2n$ et $g: n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.
2. Justifier que g et f ne sont pas bijectives.

EQW **Exercice 6** Soient A, B, C, D quatre parties d'un ensemble. On suppose que $A \subset C$, $B \subset D$, $C \cap D = \emptyset$ et $A \cup B = C \cup D$. Montrer que $A = C$ et $B = D$.

CII **Exercice 7** On définit une relation \mathcal{R} sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par $f \mathcal{R} g$ si et seulement s'il existe une bijection $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\varphi \circ f = g \circ \varphi$.

1. Pour φ bijective, justifier l'équivalence $\varphi \circ f = g \circ \varphi \Leftrightarrow \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = g$.
Indication : Si $f = g$, alors $f \circ h = g \circ h$.
2. Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

KL2 **Exercice 8** Soient A, B deux parties d'un ensemble fini E . On cherche les ensembles X vérifiant l'équation (E): $A \cap X = B$.

1. Donner sans justification une CNS sur A et B pour que (E) admette des solutions.
2. Lorsque cette condition est vérifiée, décrire sans justifier les solutions de (E) et en donner leur nombre, en fonction de $|A|$ et $|E|$.

Indication : Éventuellement, se contenter de répondre dans le cas où $|A| = |E| - 1$.

JVW **Exercice 9** Soit E un ensemble et $A \subset E$. Montrer que l'application $f: \begin{matrix} \mathcal{P}(E) & \rightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(\overline{A}) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap \overline{A}) \end{matrix}$ est bijective et donner sa bijection réciproque.

F27 **Exercice 10** Pour $a \in \mathbb{Z}^*$, on s'intéresse à l'existence d'une fonction $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ telle que (*): $\forall n, (f \circ f)(n) = n + a$.

1. Pour a pair, montrer qu'il existe une telle fonction.
2. Soit f vérifiant (*).

(a) Montrer que f est bijective.

(b) ★ Soit $x \in \mathbb{Z}$. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, les $f^{(n)}(x)$ sont distincts.

Le résultat s'étend de même à $n \in \mathbb{Z}$, avec la convention $f^{(n)} = (f^{-1})^{-n}$, pour $n \leq 0$.

On admet que la relation $x \sim y \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, (f^{(n_0)}(x) = y \text{ ou } f^{(n_0)}(y) = x)$ est une relation d'équivalence sur \mathbb{Z} .

(c) ★ Décrire la forme des classes d'équivalence de \sim . Pour a impair, obtenir une contradiction.

8BB **Exercice 11** ★ **Cas particulier du théorème de Van der Waerden.** Un 2-coloriage d'un ensemble E est la donnée d'une application $f: E \rightarrow \{0, 1\}$. On peut imaginer que 0 correspond à la couleur blanche, et 1 à la noire.

1. On considère $E = \llbracket 1, 165 \rrbracket$, que l'on partitionne en blocs de 5 termes consécutifs A_1, A_2, \dots , où $A_1 = \llbracket 1, 5 \rrbracket$, $A_2 = \llbracket 6, 10 \rrbracket$, etc.

Montrer que si l'on colorie E avec deux couleurs, il existe deux blocs A_i, A_j avec $i \neq j$ qui ont le même coloriage (un coloriage d'un bloc étant assimilé à un quintuplet (c_1, \dots, c_5) de couleurs).

2. ★ En déduire que si l'on colorie $\llbracket 1, 325 \rrbracket$ avec deux couleurs, il existe trois entiers distincts $i, j, k \in \llbracket 1, 325 \rrbracket$ en progression arithmétique de la même couleur.

On pourra noter $a_1 < a_2$ deux numéros parmi les trois premiers entiers d'un bloc ayant la même couleur, ou se contenter de traiter un cas particulier non trivial.

J71 **Exercice 12** ★ Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante exhaustive de parties de \mathbb{N} , c'est-à-dire vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}$. On suppose que pour toute partie infinie $X \subset \mathbb{N}$, il existe un n tel que $X \cap A_n$ soit infini. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $A_n = \mathbb{N}$.