

Interro n°3

Penser à aborder le 10.1, et éventuellement le 11.1.

8UY **Exercice 1**

1. Énoncer la formule de Pascal.
2. Démontrer la formule du binôme de Newton.

1RJ **Exercice 2** Calculer $\sum_{k=0}^n \frac{e^{(k+1)^2}}{e^{k^2}}$

R5Z **Exercice 3** Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n k! \leq (n+1)!$.

HPT **Exercice 4** Calculer $\prod_{k=1}^n \frac{2k+3}{2k-1}$

AZW **Exercice 5** Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{1 \leq i < j \leq n} 2^j$
2. $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \min(i, j)$

2P6 **Exercice 6** Calculer

1. $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!k!}$.
2. $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!(k+1)!}$.

TVW **Exercice 7**

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la fonction partie entière, paramétriser l'ensemble des entiers k tels que $0 \leq 3k + 2 \leq n$.
2. Calculer $\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^n k$

91M **Exercice 8** ♡

1. À l'aide de la fonction $f: x \mapsto \sum_{k=0}^n x^k$, déterminer la somme $\sum_{k=1}^n kx^{k-1}$
2. ★ Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $C(k)$ le nombre de chiffre de l'écriture de k en base 10. On pose $n = 10^p - 1$, calculer la somme $\sum_{k=1}^n C(k)$.

Indication : Regrouper les termes.

NVJ **Exercice 9** On considère un polynôme $P = X^4 + pX^2 + qX + r$, avec $r \neq 0$. On suppose que P est scindé de racines x_1, x_2, x_3, x_4 , c'est-à-dire que $P = \prod_{i=1}^4 (X - x_i)$.

1. Exprimer r, q et p en fonction des racines.
2. Justifier l'existence et calculer $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$ en fonction de p, q, r .
3. En utilisant $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, calculer $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$, en fonction de p, q, r .

3BB **Exercice 10** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^m$, en fonction de $m \in \mathbb{N}$.
2. Pour $z \in \mathbb{C}$, montrer que $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} (z + \omega)^n = n(z^n + 1)$.

1Y9 **Exercice 11** Soit $p \in \mathbb{N}$, et $m \geq p$.

1. Montrer que $\sum_{n=p}^m \binom{n}{p} = \binom{m+1}{p+1}$.
2. ★ Calculer $\sum_{n=p}^m n \binom{n}{p}$.

Indication : Ou bien appliquer la formule de Pascal, ou bien forcer l'apparition d'une formule du capitaine.

64M **Exercice 12 Inégalité de Tchebychev.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ et $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$ des réels.

En remarquant que la quantité $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (x_i - x_j)(y_i - y_j)$ est positive, montrer que

$$\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) \leq \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

TOS **Exercice 13 ★ Décomposition factorielle.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{N}$ tels que $\forall i, x_i \leq i, x_p \neq 0$ et $n = \sum_{k=1}^p x_k k!$ et que cette écriture est unique.

Indication : Pour l'unicité, on utilisera $\sum_{k=1}^n k \times k! = (n+1)! - 1$.

6K1 **Exercice 14** ★

1. Soient $\varphi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\varphi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Calculer $\varphi_1 \varphi_2$ et $\varphi_1 + \varphi_2$. En déduire que $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que la distance de $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ à \mathbb{Z} tend vers 0, lorsque $n \rightarrow +\infty$.