

# Interro n°6

1KT **Exercice 1** Soit  $(u_n), (v_n)$  deux suites qui convergent vers  $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$  respectivement.

1. Donner la définition formelle de  $u_n \rightarrow \ell$ .
2. Montrer que la suite  $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell + \ell'$ .

9N6 **Exercice 2** Soit  $(u_n), (v_n)$  deux suites réelles. À quelles conditions ces suites sont-elles adjacentes ?

VR6 **Exercice 3** Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie donner une preuve, sinon, donner un contre-exemple.

1. Si  $\lim u_n = 0$ ,  $\lim(1 + u_n)^n = 1$ .
2. Si  $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$ , alors  $(u_n)$  converge.
3. Si  $u_n \rightarrow +\infty$ , alors  $(u_n)$  est croissante APCR.

HBD **Exercice 4** On considère  $S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ . Déterminer la limite de  $S_n$ .

**Indication :** *Minorer  $S_n$ .*

6VZ **Exercice 5** Soit  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

1. Montrer que si  $(u_n^2)$  est bornée, la suite  $(u_n)$  est bornée.
2. On suppose que  $(u_n)$  est croissante et que  $u_n^2 \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$ .
  - (a) Montrer que  $\ell \geq 0$
  - (b) Montrer que  $(u_n)$  converge.
  - (c) Que dire de la limite de  $(u_n)$  ? Justifier.

EPR **Exercice 6** Pour  $z, z' \in \mathbb{C}$ , on pose

$$z \leq z' \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, z' = z^{2^n}.$$

1. Montrer que  $\leq$  est réflexive et transitive.
2. ★  $\leq$  est-elle une relation d'ordre ?

X31 **Exercice 7** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de termes strictement positifs. On suppose que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ , avec  $\ell > 1$ .

1. Soit  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $1 < a < \ell$ . Montrer que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq a$  à partir d'un rang  $n_0$ . On redémontrera tout résultat du cours.
2. Donner sans justifier une minoration, pour  $n \geq n_0$ , de  $u_n$  en fonction de  $a$  et  $u_{n_0}$ . En déduire qu'il existe  $C > 0$  tel que  $\forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}, u_n \geq Ca^n$ .

*Ce résultat est également valable si  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow +\infty$ .*

3. Étudier la limite, quand  $n \rightarrow +\infty$ , de  $u_n = \frac{n!}{a^n}$ .

WHC **Exercice 8** Soit  $a > 0$ . On définit une suite  $(u_n)$  par  $u_n = (1+a)(1+a^2) \dots (1+a^n)$ .

1. Montrer que si  $a \geq 1$ ,  $(u_n)$  est divergente.
2. En utilisant l'inégalité  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$ , montrer que si  $0 < a < 1$ ,  $(u_n)$  est convergente.

VKG **Exercice 9** ♥ **Lemme de Cesàro.** Soit  $(u_n)$  une suite tendant vers  $+\infty$ . Montrer que  $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$  tend vers  $+\infty$ .

WJV **Exercice 10** ★ Soit  $u_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{1}{n} + \frac{k}{n^3}\right)$ .

1. Montrer que  $|u_n - n \sin \frac{1}{n}| \rightarrow 0$ .
2. Montrer que  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ .

TNT **Exercice 11** ★ Soit  $(u_n)$  une suite positive vérifiant  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} \leq \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$ .

1. Montrer que la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = \max(u_n, u_{n+1})$  est décroissante, et converge vers une limite  $\ell$ .
2. Soit  $\varepsilon > 0$ . Si  $v_n \leq \ell + \varepsilon$  et  $u_{n+1} < \ell - \varepsilon$ , montrer que  $v_{n+1} < \ell$ .  
En déduire que  $u_n \rightarrow \ell$ .

L17 **Exercice 12** ★ Soit  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  bornée. Montrer que  $\sup_{x \in \mathbb{R}} \inf_{y \in \mathbb{R}} f(x, y) \leq \inf_{y \in \mathbb{R}} \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x, y)$ .

EBB **Exercice 13** ★ Soit  $K > 1$  et  $(\varepsilon_n)$  une suite positive qui tend vers 0. Soit  $(u_n)$  une suite vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{u_n + \varepsilon_n}{K}.$$

1. Montrer que  $(u_n)$  est bornée.  
**Indication :** *Majorer explicitement  $u_n$ , en fonction de  $u_0$ .*
2. Montrer que  $u_n \rightarrow 0$ .  
**Indication :** *Procéder comme dans la question précédente.*