

Interro n°7

YJE Exercice 1 Soit $f: I \rightarrow I$ une fonction continue et (u_n) une suite vérifiant $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On suppose $u_n \rightarrow \ell$, avec $\ell \in I$. Montrer que ℓ est un point fixe de f .
2. Montrer que si f est croissante, alors la suite (u_n) est monotone.

Indication : Faire une disjonction de cas, sur les deux premiers termes.

ZWU Exercice 2

1. Donner la définition d'une valeur d'adhérence d'une suite (u_n) .
2. Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass.
3. ★ Soit $(a_n), (b_n)$ deux suites bornées. Montrer qu'il existe une extractrice φ telle que les suites $(a_{\varphi(n)})$ et $(b_{\varphi(n)})$ convergent.

DDO Exercice 3 Soit (u_n) une suite vérifiant $u_0 \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n}$.

1. Montrer que $f: x \mapsto \frac{1}{2+x}$ est K -lipschitzienne sur \mathbb{R}_+ , pour une constante $K < 1$.
2. Vérifier que f admet un unique point fixe $a \in \mathbb{R}_+$.
3. Montrer que $|u_n - a| \rightarrow 0$.

3TS Exercice 4 Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow [0,1[$ une fonction continue, et (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n f(u_n)$.

1. Expliciter une fonction g telle que $\forall n, u_{n+1} = g(u_n)$.

2. Montrer que $[0,1]$ est stable par g .

Indication : Penser à utiliser $\forall x, 0 \leq x < 1$.

3. Étudier la convergence de la suite (u_n) .

K3K Exercice 5 Soit $f: x \mapsto \frac{x^3+3x}{3x^2+1}$ et (u_n) vérifiant $u_0 \geq 0$ et $\forall n, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier les variations de f .

Indication : Reconnaître un carré.

2. Étudier le signe de $f(x) - x$.

3. Tracer l'allure de la courbe de f sur \mathbb{R}_+ , puis donner, sans justifier, le comportement de la suite (u_n) , en fonction de $u_0 \in \mathbb{R}_+$.

80L Exercice 6 On considère une suite (u_n) vérifiant

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^n u_k}.$$

1. Montrer que (u_n) est croissante à partir du rang 1.

2. Déterminer la limite de (u_n) .

Indication : Considérer $u_{n+1}^2 - u_n^2$.

3. Étudier la limite de $u_{n+1} - u_n$.

Indication : Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de u_n uniquement.

4. ★ En déduire un équivalent de u_n .

M57 Exercice 7 ♣ Suites de Cauchy. On dit que (u_n) est de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, |u_p - u_q| < \varepsilon$.

1. Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.

2. Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.

3. ★ Montrer que toute suite de Cauchy est convergente.

Indication : Montrer l'unicité d'une valeur d'adhérence de (u_n) .

S6X Exercice 8 Soit (u_n) une suite non bornée. Montrer qu'elle admet une suite extraite (v_n) telle que $|v_n| \rightarrow +\infty$.

0D5 Exercice 9 ★ On considère une suite (u_n) vérifiant $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$ et $u_n \rightarrow +\infty$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. On suppose que $|u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$ à partir du rang n_0 . Soit $x \geq u_{n_0}$, montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $|u_p - x| \leq \varepsilon$.

2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $v_n \rightarrow +\infty$. Montrer que $\{u_n - v_m, n, m \in \mathbb{N}\}$ est dense dans \mathbb{R} .

3. En déduire que $\{u_n - \lfloor u_n \rfloor, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0, 1]$.

Indication : On peut se contenter de montrer la densité dans $]0, 1[$.

4. ★ Montrer que $\{\sin(\ln n), n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

HXB Exercice 10 ★

1. Étudier la convergence d'une suite (u_n) vérifiant $\forall n, u_n + \frac{1}{2}u_{n+1} = 1$.

Indication : Considérer $\ell = \frac{2}{3}$ et la suite $u_{n+1} - \ell$.

2. Soit (u_n) une suite réelle bornée telle que $u_n + \frac{1}{2}u_{n+1} \rightarrow 1$. Montrer que (u_n) converge.

Indication : Considérer une valeur d'adhérence.