

Interro n°8

RFM **Exercice 1** Soit $A = (a_{ij})_{\substack{i \leq n \\ j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{ij})_{\substack{i \leq p \\ j \leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. On rappelle que l'on a $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$.

1. Quelles sont les dimensions de la matrice AB (nombre de lignes/colonnes)? Donner l'expression du coefficient $(AB)_{ij}$ du produit des deux matrices.

On considère à présent $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $n = p = q$.

2. (a) À quelle condition sur les coefficients (a_{ij}) la matrice A est-elle triangulaire supérieure?

(b) Montrer que si A et B sont triangulaires supérieures, alors AB est triangulaire supérieure.

3. On suppose que $A = \text{Diag}(d_1, \dots, d_n)$ est diagonale. En posant le produit matriciel, expliciter le produit AB .

Q9A **Exercice 2** Soit X un ensemble muni d'une loi interne \star associative. Un élément $x \in X$ est dit idempotent si $x \star x = x$.

1. Montrer que si x, y sont idempotents et commutent, alors $x \star y$ est idempotent.

2. Montrer que si x est idempotent et inversible alors x^{-1} est idempotent.

4P4 **Exercice 3** Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, calculer JX .

2. Calculer J^2 et J^3 .

3. Énoncer le théorème du binôme de Newton, dans un anneau $(A, +, \times)$ quelconque.

4. Calculer, pour $n \geq 2$, M^n .

BG1 **Exercice 4** On travaille dans le groupe $(\mathbb{Z}, +)$.

1. Soit $H \subset \mathbb{Z}$. À quelles conditions H est-il un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$?

Soit $\alpha \in \mathbb{Z}$. On pourra utiliser sans justifier que $\alpha\mathbb{Z} = \{\alpha k, k \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de \mathbb{Z} .

2. Montrer brièvement que si $H \subset (\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de \mathbb{Z} et $\alpha \in H$, alors $\alpha\mathbb{Z} \subset H$.

3. On note \mathcal{H} l'ensemble des sous-groupes de \mathbb{Z} qui contiennent α . Montrer que $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H = \alpha\mathbb{Z}$.

XZ7 **Exercice 5** Soit $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice inversible, et $\varphi: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad M \mapsto PMP^{-1}$. Montrer que φ est un morphisme d'anneaux.

G6E **Exercice 6** Soit $\varphi: G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes. On note $\text{Ker } \varphi = \varphi^{-1}(\{e'\})$, où e' est l'élément neutre de G' , appelé noyau de φ . Montrer que $\text{Ker } \varphi$ est un sous-groupe de G .

L9A **Exercice 7** Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$.

1. On suppose que a, b sont premiers entre eux. Montrer que les ka pour $k \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket$ forment un système complet de congruence modulo b , c'est-à-dire que pour tout $\ell \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket$, il existe un (unique) $k \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket$ tel que $ka \equiv \ell[b]$.

2. ★ Montrer que a et b sont premiers entre eux si et seulement si pour tout entier $n \geq (a-1)(b-1)$, il existe $(u, v) \in \mathbb{N}^2$ tel que $au + bv = n$.

XVJ **Exercice 8** Soit $N = 4444^{4444}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $s(n)$ la somme des chiffres de n . Montrer que $n \equiv s(n)[9]$.

Indication : Écrire $n = \sum_{k=0}^n a_k 10^k$.

2. Déterminer le reste de la division euclidienne de N par 9.

Indication : On pourra vérifier que pour tout a premier avec 9, on a $a^6 \equiv 1[9]$.

3. ★ On note A la somme des chiffres de N , B la somme des chiffres de A et C la somme des chiffres de B . Que vaut C ?

CTH **Exercice 9** Soit (G, \times) un groupe fini.

1. Pour $x \in G$, on note $Z(x) = \{g \in G \mid gx = xg\}$. Montrer que $Z(x)$ est un sous-groupe de G .

On rappelle que la relation $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G, y = gxg^{-1}$ est une relation d'équivalence sur G .

2. Soit $x \in G$. On note C_x la classe d'équivalence de x pour \sim .

(a) Soit $\varphi: g \mapsto gxg^{-1}$. Montrer que $\varphi(g) = \varphi(g')$ si et seulement si $g^{-1}g' \in Z(x)$. Cela est équivalent à ce que $g' \in gZ(x) = \{gy, y \in Z(x)\}$.

(b) En déduire que $|G| = |Z(x)| \times |C_x|$, où C_x est la classe d'équivalence de x .

3. ★ Soit p un nombre premier. Montrer que si G est de cardinal p^α , avec $\alpha \in \mathbb{N}^*$, alors $Z(G)$ est non trivial (différent de $\{e\}$).

8MV **Exercice 10** ★ Montrer que tout sous-groupe H de $(\mathbb{Z}, +)$ est de la forme $\alpha\mathbb{Z}$, pour $\alpha \in \mathbb{N}$.

Indication : Considérer $\alpha = \min H \cap \mathbb{N}^*$, et montrer que $H \subset \alpha\mathbb{Z}$.

52K **Exercice 11** ★ ★ Soit A un anneau et $a, b \in A$. Montrer que si $1_A - ab$ est inversible, alors $1_A - ba$ l'est aussi.

Indication : Conjecturer une relation entre les deux inverses, à l'aide de la relation formelle $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$.