Interro n°9

Aborder les exercices jusqu'au 9.1.

70C **Exercice 1** Soit $x, y \in \mathbb{R}^*$. Quelles sont les parties réelle et imaginaire de $\frac{1+i}{x+iy}$?

AWU **Exercice 2** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose A inversible
   (a) Sans utiliser la notion de rang, justifier que pour tout $Y \in \mathbb{R}^n$, le système $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^n$ a une unique solution.

   Un tel système est dit de Cramer.

   (b) Qu'en déduire quant-à l'application linéaire $\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad X \mapsto AX$?
2. Soit $\beta\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad M \mapsto AM$. Montrer que si β est surjective, α est surjective.

VAG **Exercice 3**

1. Donner la forme exponentielle de $(1+i)$ et de $\sqrt{3}+i$.
2. À l'aide du nombre complexe $(1+i)(\sqrt{3}+i)$, déterminer $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$
3. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

5NY **Exercice 4** Déterminer le lieu géométrique des points images des $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| = |z+1|$.

OCO **Exercice 5** Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure, de coefficients diagonaux égaux à 1.

1. La matrice T est-elle forcément inversible ?
2. Pour $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale inversible et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, expliciter les coefficients de DAD^{-1}.
3. Montrer qu'il existe D diagonale inversible telle que les coefficients de DTD^{-1} soient tous bornés par 1 (en valeur absolue).

HMR **Exercice 6** Soit $X, Y \in \mathbb{R}^n$, identifiés à des matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Expliciter les produits X^TY et XY^T.
2. Justifier que pour $n \geqslant 2$, XY^T n'est pas inversible.

RAT **Exercice 7** Pour quelles valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$ le système linéaire suivant admet-il des solutions ? $\begin{cases} x+y+2z = a \\ x+z = b \\ 2x+y+3z = c \end{cases}$.

OQM **Exercice 8** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. On donne $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer des scalaires a_2, b_2 tels que $A^2 = a_2A + b_2I_3$. En déduire que A est inversible et expliciter A^{-1}.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n \in \mathrm{Vect}(I_3, A)$.

TOP **Exercice 9**

Calculer l'inverse.

1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. ★ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$

9IE **Exercice 10** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure, avec une diagonale nulle. Montrer formellement que $A^n = O_n$.
Indication : *On demande d'identifier et d'énoncer une propriété sur les puissances successives A^k, puis de la démontrer par récurrence.*

2SH **Exercice 11** ★ Si $P = \sum_{k=0}^{d} b_kX^k$ est un polynôme réel, on note $P(A) = \sum_{k=0}^{d} b_kA^k$, appelé polynôme en A.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un polynôme P non nul de degré $\leqslant n^2$ tel que $P(A) = O_n$.
   Indication : *Se ramener à la résolution d'un système linéaire.*
2. Pour $A \in GL_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe un polynôme P tel que $A^{-1} = P(A)$.

ZR1 **Exercice 12** ★ On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est monotone si A est inversible et A^{-1} est à coefficients positifs.

1. Pour $X \in \mathbb{R}^n$, on note $X \geqslant 0$ si toutes ses coordonnées sont positives. Montrer que A est monotone si et seulement si $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $AX \geqslant 0 \Rightarrow X \geqslant 0$,
   Indication : *Montrer que l'équation $AX = \vec{0}$ n'a pas de solution autre que $\vec{0}$.*
2. Soient $a_1, \dots, a_n \geqslant 0$ et $A = \begin{pmatrix} 2+a_1 & -1 & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & -1 & 2+a_n \end{pmatrix}$. Montrer que A est monotone.
3. Montrer que si A est à coefficients positifs et monotone, chaque ligne et chaque colonne de A a un unique coefficient non nul.