# Interro n°11

En priorité : jusqu'au 10.1.

1JG **Exercice 1** Soit $n \geqslant 1$ et $P = (X-2)^n - (X-3)^n$.

1. Déterminer les coefficients de degrés 0, $n$ et $n-1$ de $P$. Quel est son degré ?
2. Quelles sont les racines réelles de $P$ ?

R8A **Exercice 2**

1. Énoncer le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^n$ par $X(X+1)$.
   **Indication** : *Écrire la division euclidienne, et déterminer les coefficients du reste.*

KIE **Exercice 3**

1. Pour $i, k \in \mathbb{N}$, donner sans justifier une expression de la dérivée $i$-ème $\left(X^k\right)^{(i)}$.
   **Indication** : *Distinguer selon la valeur de $i$*
2. Que dire de deux polynômes $P, Q$ tels que $\forall k \in \mathbb{N}$, $P^{(k)}(0) = Q^{(k)}(0)$ ?

W7I **Exercice 4** Soit $\theta \in \mathbb{R}$, avec $\cos\theta \neq \pm 1$. On admet que les racines de l'équation $X^2 - 2\cos\theta\ X + 1 = 0$ sont $e^{\pm i\theta}$.

1. Quelles sont les suites complexes, puis réelles vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} - 2\cos\theta u_{n+1} + u_n = 0$.
2. Quelles sont les solutions complexes, puis réelles de l'équation $y'' - 2\cos\theta y' + y = 0$ ?

IQJ **Exercice 5** On considère la suite complexe définie par $z_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{i}{2} z_n + 1$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer une expression de $z_n$ en fonction de $n$.
2. Étudier la convergence de la suite $(z_n)$.

PJJ **Exercice 6** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère l'équation différentielle $(E)\colon y'' - 2y' + y = f(t)$.

1. Résoudre l'équation homogène associée.
2. Déterminer une solution particulière de $(E)$ dans les trois cas suivants :
   (a) $f(t) = 1$ (b) $f(t) = \cos 2t$ (c) $f(t) = (\cos t)^2$
3. On prend $f(t) = 1$. Déterminer l'unique solution de $(E)$ vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$.

61K **Exercice 7**

1. Soient $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$. Rappeler l'expression du coefficient $c_k$ de degré $k$ de $PQ$.
2. En considérant le coefficient de degré $n$ du développement de $(1+X)^{2n} = (1+X)^n(1+X)^n$, en déduire la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

I3M **Exercice 8** Déterminer les fonctions dérivables $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$, $y'(x) = y(-x)$.
**Indication** : *Justifier que $y'$ est dérivable.*

QVU **Exercice 9** Soit $y$ une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $x^2y'' - 2y = 0$, c'est-à-dire vérifiant $\forall x > 0$, $x^2y''(x) - 2y(x) = 0$. Montrer que $z\colon t \mapsto y(e^t)$ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2. En déduire l'expression de $y$.

DSH **Exercice 10** Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère la relation $(*)\colon \forall \theta \in \mathbb{R}$, $P(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

1. Montrer l'unicité d'un polynôme $P$ vérifiant $(*)$.
2. Montrer l'existence d'un polynôme $P$ vérifiant $(*)$. Dans la suite, on le note $T_n$.
3. Montrer que pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, $T_n \circ T_m = T_m \circ T_n$.

YY7 **Exercice 11** ★ Soient $a, b \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ et $(u_n)$ une suite vérifiant $(E_1)\colon \forall n$, $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$. On fait l'hypothèse que l'équation caractéristique de la récurrence admet deux racines distinctes $\lambda$ et $\mu$.

1. On suppose qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $\forall n$, $\alpha\lambda^n + \beta\mu^n = 1$. Montrer que $\lambda = 1$ ou $\mu = 1$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la suite $(u_{pn})$ vérifie une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 $(E_p)$. Préciser les racines de l'équation caractéristique de $(E_p)$.
3. Déterminer une CNS sur $\lambda, \mu$ pour qu'il existe une suite $(u_n)$ non nulle périodique vérifiant $(E_1)$.

CF1 **Exercice 12** ★ Soit $\lambda > 1$, $(u_n)$ une suite réelle et $(v_n)$ vérifiant $\forall n$, $v_{n+1} = \lambda u_{n+1} - u_n$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer une expression explicite de $u_n$ en fonction des termes de la suite $(v_n)$.
2. Montrer que si $v_n \to 0$, alors $u_n \to 0$.
3. Montrer que $(u_n)$ converge si et seulement si $(v_n)$ converge.