

Interro n°13

CEV Exercice 1

1. Donner la définition de l'uniforme continuité d'une fonction.
2. Montrer que $f: x \mapsto \sin \frac{1}{x^2+1}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
Indication : Calculer f' .
3. Énoncer le théorème de Heine.
4. Donner sans justifier un exemple d'une fonction continue non uniformément continue.

LUA **Exercice 2** Déterminer la limite en 0 de $\frac{3 \sin x - x \cos x - 2x}{\sin^3 x}$
Indication : Effectuer un $DL_3(0)$ du numérateur.

ONK **Exercice 3** Déterminer un $DL_4(0)$ de $\ln(\cosh 2x)$, puis de $\cosh(\ln(\cosh 2x))$.

E4D **Exercice 4** Soit $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$

1. Déterminer un $DL_3(0)$ de $f(x)$.
2. Étudier la position au voisinage de 0 de la courbe de f par rapport à sa tangente en 0.

J4R Exercice 5

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que l'équation $y^2 + \ln y = x$ admet une unique solution, notée $y(x) \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que $x \mapsto y(x)$ est continue.
3. Justifier que $y(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. En déduire un équivalent simple de $y(x)$, quand $x \rightarrow +\infty$.

TXN Exercice 6

1. Donner un développement limité en $+\infty$ de $\frac{1}{n+1}$ avec un terme d'erreur en $o(\frac{1}{n^2})$.
2. Déterminer un équivalent, quand $n \rightarrow +\infty$, de $e^{1/n} - e^{1/(n+1)}$.

SK7 **Exercice 7** On considère $f: x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.

Indication : Il s'agit d'effectuer un DL en $+\infty$ (en $\frac{1}{x}$). Un $DL_1(0)$ de $\sqrt{1+u}$ suffit.

1. Montrer que $\frac{x^3}{x-1} = x^2 + x + 1 + o_{+\infty}(1)$.
2. Montrer que f admet une asymptotique oblique en $+\infty$.

600 **Exercice 8** Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et 1-périodique.

1. Montrer que f admet un minimum et un maximum.
2. Montrer que pour tout $a > 0$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c+a) = f(c)$.

7DH **Exercice 9** Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$.

1. Donner un $DL_2(0)$ de $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$.
2. Énoncer le résultat de primitivation d'un DL en 0, pour une fonction g continue.
3. Déterminer un $DL_4(0)$ de f .

ZA4 **Exercice 10** Pour $n \geq 1$, on considère les intégrales $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^n} dx$ et $J_n = \int_0^1 \frac{x^{2n-1}}{1+x^n} dx$.

1. Déterminer la limite de I_n .
2. Calculer J_n .
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|I_n - J_n| \leq \frac{1}{2n(n+1)}$.
4. Déterminer un équivalent de I_n .

Indication : Changement de variable.

ZHT **Exercice 11** Soit (u_n) une suite réelle. Montrer que si $u_n = o(\sqrt{n})$, on a $(1 + \frac{u_n}{n})^n \sim e^{u_n}$.

M7Q **Exercice 12** La fonction $f: x \mapsto e^x - x - 1$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_-$ sur $[0, +\infty[$, de réciproque g_1 et une seconde de $\mathbb{R}_+$ sur $[0, +\infty[$, de réciproque g_2 .

1. Déterminer un équivalent, quand $x \rightarrow 0^+$ de $g_1(x)$.
2. Montrer que $h: x \mapsto g_1 \circ g_2^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

03E **Exercice 13** ★ Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Étudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Indication : Il est nécessaire d'utiliser un théorème du cours...

KUW **Exercice 14** ★ Soit $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $\varphi: x \mapsto \sup_{[0,x]} f$ est continue.

Indication : Faire une disjonction, de deux cas, pour montrer la continuité en x_0 .