Interro n°14

En priorité → 9.2.

D3M **Exercice 1** On considère $f\colon \begin{array}{ccc} [0,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x\sin x} \end{array}$

1. Montrer que f est dérivable sur $[0,\pi[$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi[$.

VNY **Exercice 2**

1. Énoncer précisément le théorème de Rolle.
2. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ vérifiant les mêmes hypothèses de régularité que le théorème de Rolle.
   (a) Donner l'équation $L(x) = \dots$ de la droite d'interpolation passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.
   (b) Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

2K6 **Exercice 3 Composition de DLs**. Déterminer le

1. $DL_3(0)$ de $e^{\sin x}$
2. $DL_n(0)$ de $\ln(1+x)$

XZO **Exercice 4** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la composée de deux fonctions f, g de classe $\mathcal{C}^n$ est de classe $\mathcal{C}^n$.

I6Q **Exercice 5**

1. Rappeler la définition d'un extrema local de $f\colon I \to \mathbb{R}$, puis le lien entre les extrema locaux et les points critiques de f.
2. Étudier l'existence d'extrema locaux et globaux de $f\colon x \mapsto x^2 \tan x$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
   Indication : *Le signe de f' est simple.*

Q93 **Exercice 6**

1. Énoncer le théorème de la limite de la dérivée, pour une limite finie.
2. Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que $g\colon x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ admet un prolongement par continuité en 0 et que ce prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$.
   Indication : *D'après Taylor-Young, f admet un $DL_2(0)$, de la forme $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + o_0(x^2)$.*

764 **Exercice 7**

1. Montrer que si $f\colon I \to \mathbb{R}$ est dérivable et s'annule au moins n fois, f' s'annule au moins $n-1$ fois.
2. Montrer que pour tout polynôme P de degré n, l'équation $e^x = P(x)$ a au plus $n+1$ solutions.

3CH **Exercice 8** Déterminer un équivalent en 1 de $x - x^x$

4PX **Exercice 9** Soit f définie sur $[0,1[$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Justifier que f est $\mathcal{C}^\infty$, puis vérifier que $\forall x \in [0,1[,\ f'(x)(1-x^2) = xf(x)$.
2. Énoncer la formule de Leibniz.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1[$, $f^{(n)}(x) \geqslant 0$.

468 **Exercice 10** Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ dérivable telle que $f(0) = 0$ et $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $f'(c) = 0$.

WMK **Exercice 11** Soit (u_n) une suite définie par $u_0 \geqslant 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$.

1. Montrer que (u_n) converge vers 0.
2. ★ Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ tende vers une limite finie non nulle. En déduire un équivalent de (u_n).

JJ7 **Exercice 12** ★ On admet le théorème des nombres premiers, sous la forme suivante : si on note p_n le n-ième nombre premier, on a $p_n \sim n\ln n$. On note π_n le nombre de nombres premiers $\leqslant n$.

1. Montrer que $p_{\pi_n} \sim n$.
2. Montrer que $\pi_n \sim \frac{n}{\ln n}$.

T5W **Exercice 13** ★ **Inégalité de Kolmogorov**. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$ et on pose $M_0 = \sup|f|$ et $M_2 = \sup|f''|$. Montrer que f' est bornée par $\sqrt{2M_0M_2}$.
Indication : *Comprendre pourquoi f' ne peut pas prendre de grandes valeurs : si $f'(x_0)$ est grand, alors en utilisant l'hypothèse sur f'', on peut minorer f' autour de x_0, et on peut intégrer cette minoration.*