Interro n°15

En priorité → 9.2.

ABG **Exercice 1** Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'x + y\ln x = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$
2. $y'\sin x + y\cos x = \sin(2x)$ sur $]0,\pi[$.

QNY **Exercice 2** Soit $f\colon [a,b]$ une fonction convexe. **Indication** : *Les questions sont indépendantes.*

1. Justifier que, pour $t \in [0,1]$, $tf(a) + (1-t)f(b) \leqslant \max(f(a), f(b))$. En déduire que $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) = \max(f(a), f(b))$.
2. On suppose que f est dérivable. Montrer que $f(b) - f(a) \leqslant f'(b)(b-a)$.
3. ★ On admet que f admet un minimum. Montrer que l'ensemble I des points où ce minimum est atteint est un intervalle.

TCH **Exercice 3**

1. Quelles sont les fonctions $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ dérivables, vérifiant $f' = -f^4$?
   Indication : *Appliquer la méthode pour des équations aux variables séparées.*
2. Peut-il exister une telle fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$?

MVS **Exercice 4** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Pour $x_1 < x_2 < x_3$. Écrire les inégalités entre les trois pentes des cordes de f.
2. On suppose que f est majorée. Montrer que f est constante.
   Indication : *Raisonner par l'absurde.*

DDV **Exercice 5** Soit $f, g\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ avec f dérivable et g continue. On suppose que $\forall x \geqslant 0,\ f'(x) + f(x) = g(x)$.

1. Expliciter f en fonction de g et $f(0)$.
2. Montrer que si g est bornée, alors f est bornée. En déduire que f est lipschitzienne.

1FU **Exercice 6**

1. Énoncer l'inégalité de convexité, à $n \geqslant 2$ termes, pour $f\colon I \to \mathbb{R}$ convexe.
2. La démontrer.

P4P **Exercice 7** Soit $g\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe au plus une solution bornée à l'équation différentielle $(E)\colon y' - y = g$ sur $\mathbb{R}_+$. **Indication** : *Appliquer un schéma de raisonnement d'unicité.*

FWN **Exercice 8**

1. Résoudre l'équation différentielle non résolue $(E_1)\colon 2xy' - y = x$ sur $\mathbb{R}$.
2. ★
   On admet que les solutions de l'équation $(H_2)\colon 2xy' + y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ sont les $x \mapsto \frac{C}{\sqrt{|x|}}$, et que la fonction $x \mapsto \frac{x}{3}$ est une solution particulière de $(E_2)\colon 2xy' + y = x$ sur $\mathbb{R}$. L'équation $(E)\colon 2xy' - |y| = x$ admet-elle une solution sur $\mathbb{R}$?
   Indication : *Si y est solution, commencer par déterminer son signe sur $\mathbb{R}_+$.*

MMK **Exercice 9** Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a,b]$ et L la droite d'interpolation de f entre a et b.

1. Soit $x \in]a,b[$.
   (a) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $g(t) = f(t) - L(t) - \lambda(t-a)(t-b)$ vérifie $g(a) = g(b) = g(x) = 0$.
   (b) Montrer qu'il existe $c_x \in]a,b[$ tel que $f(x) - L(x) = f''(c_x)\frac{(x-a)(x-b)}{2}$.
   Indication : *Déduire de la question précédente que g'' s'annule, en un point c_x.*
2. Si f'' est bornée, en déduire que $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f - L| \leqslant \sup\limits_{[a,b]} |f''| \dfrac{(b-a)^2}{8}$.
3. Donner un exemple de fonction pour laquelle il y a égalité.

85Q **Exercice 10** Soit $b \in \mathbb{R}$ et $f\colon a \mapsto \int_{-1}^{1} |t^2 + at + b|\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est paire
2. Montrer que f est convexe.

S9S **Exercice 11** ★

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le polynôme $P' - \lambda P$ est scindé.
   Indication : *$P' - \lambda P$ est un facteur d'une dérivée...*
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé. Montrer que $P'' - 2P' + P$ est scindé.