Interro n°16

Durée : 1h30. En priorité → Ex 8.

NUZ **Exercice 1** Soit $E = [\![1, n]\!]$ et $A \subset E$ une partie de cardinal k.

1. Quel est le nombre de parties de E de cardinal k ?
2. Quel est le nombre de parties de $\overline{A}$?
3. Expliciter une bijection entre les parties de E contenant A et les parties de $\overline{A}$. Préciser sa réciproque.

PPX **Exercice 2** L'alphabet comporte 26 lettres, dont 6 voyelles. Combien peut-on former de mots

1. de 6 lettres ?
2. de 6 lettres distinctes ?
3. de 6 lettres, commençant par une consonne, et alternant consonne-voyelle ?
4. de 6 lettres, avec autant de consonnes que de voyelles ?

QZ2 **Exercice 3** On tire successivement 4 cartes d'un jeu de 54 cartes. Quelle est la probabilité de tirer les 4 as ?

B93 **Exercice 4** On répartit n boules dans k urnes numérotées de 1 à k.

1. On suppose que les boules sont elles-mêmes distinguées, c'est-à-dire numérotées de 1 à n. Quel est le nombre $q_{n,k}$ de répartitions possibles ?
2. On suppose que les boules sont toutes identiques. On note $q_{n,k}$ le nombre de répartitions possibles.
   (a) Que valent $p_{1,k}$ et $p_{2,k}$?
   (b) Que valent $p_{n,2}$ et $p_{n,3}$?

OOB **Exercice 5** On permute aléatoirement les lettres du mot BAOBAB. Quelle est la probabilité de tomber sur le même mot ?

LV1 **Exercice 6** Soit E un ensemble fini, de cardinal n. En dénombrant le nombre de couples (x, A) où $x \in E$, $A \subset E$, et $x \in A$, montrer que $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

BDJ **Exercice 7** Il y a M tickets de lotterie, dont 3 gagnants. On en achète n. Quelle est la probabilité que l'on ait au moins un ticket gagnant ?

IZO **Exercice 8** Pour $n, p \in \mathbb{N}$, on note $u_{n,p}$ le nombre de n-listes $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ telles que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$. Montrer que pour $n \geqslant 1$, on a $u_{n,p} = \sum_{k=0}^{p} u_{n-1,k}$.

O2R **Exercice 9** ★ On s'intéresse à des mots ω sur l'alphabet $\{a, b\}$, comme $\omega = aaabbaab$. Quel est le nombre de mots de longueur n sans aab comme facteur.
Indication : *Se contenter d'établir une relation de récurrence sur ces nombres.*

17Q **Exercice 10** ★ Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il de façons d'apparier les entiers de 1 à $2r$?

BNR **Exercice 11** ★ Déterminer la probabilité que deux parties de $[\![1, n]\!]$ choisies au hasard soient incluses l'une dans l'autre.

PUX **Exercice 12** ★ ★ On appelle partition d'un entier n toute suite finie $(a_1, \ldots, a_\ell)$ d'entiers strictement positifs décroissante vérifiant $a_1 + \cdots + a_\ell = n$. Montrer que le nombre de partition d'un entier dont le nombre de parts est p est égal au nombre de partitions de n dont le nombre le plus grand est p.
Indication : *Représenter une partition $(a_1, \ldots, a_\ell)$ par un histogramme décroissant, de barres de hauteur $a_1, a_2, \ldots, a_\ell$*