Interro n°17

Durée : 1h30. En priorité → Ex 8.

Y5Q **Exercice 1** Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

1. À quelles conditions est-ce qu'une partie $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E ?
2. Montrer que $F = \{f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

KPX **Exercice 2** Énoncer la formule des probabilités composées, portant sur $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$.

96M **Exercice 3** Deux urnes A et B contiennent respectivement 6 boules blanches et 5 noires d'une part, 4 blanches et 8 noires d'autre part. On transfert au hasard une boule de l'urne A à l'urne B. On tire ensuite au hasard une boule dans l'urne B.

1. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit blanche ?
2. Quelle est la probabilité que la boule transférée soit blanche sachant que la boule tirée est blanche ?

5VN **Exercice 4** Deux joueurs A et B tirent tour à tour au panier, 100 fois chacun. Le joueur A a une probabilité p de mettre la balle dans le panier, B a une probabilité q.

1. Quelle est la probabilité qu'au final, aucun des deux joueurs ne mettent de panier ? Justifier.
2. On note X_A le nombre de paniers que met le joueur A. Donner la loi de X_A.
3. On s'intéresse à l'évènement E : «exactement 100 paniers ont été mis». Exprimer E en fonctions d'évènements sur X_A et X_b, puis donner une expression de $P(E)$, comme une somme, en termes de $P(X_A = k)$ et $P(X_B = k')$.
4. ★ On suppose que $p = q = \frac{1}{2}$. Déterminer $P(X_A \leqslant X_B)$.

6NB **Exercice 5** Soient X_1, X_2 deux variables indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. On note $Z = |X_1 - X_2|$

1. Calculer, en justifiant soigneusement, $P(Z = 0)$.
2. Décrire la loi de Z.

PRU **Exercice 6** On considère deux évènements A et B, et $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une partition de A, avec $\forall k,\ P(A_k) > 0$.

1. Montrer que $P(A \cap B) = \sum_{k=1}^n P(B \mid A_k)P(A_k)$.
2. On suppose que tous les $P(B \mid A_k)$ sont égaux. Montrer qu'ils sont égaux à $P(B \mid A)$.

85P **Exercice 7** Une loterie a lieu chaque semaine. On y vend 100 tickets de 1€ dont seulement 3 permettent de gagner une peluche. On veut jouer 5€ et notre objectif est d'obtenir au moins une peluche. Vaut-il mieux acheter 5 tickets une même semaine ou un ticket par semaine pendant 5 semaines ?
Indication : *Comparer les probabilités dans les deux situations.*

CMK **Exercice 8** On munit $\Omega = [\![1, n]\!]$ de la probabilité uniforme, et on note P_n l'ensemble des diviseurs premiers de n. Pour $p \in P_n$, on note $A_p = \{a \in \Omega \text{ t.q. } p \mid a\}$.

1. Calculer $P(A_p)$.
2. Montrer que les évènements A_p, pour $p \in P_n$ sont mutuellement indépendants.
3. ★ On note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers de $[\![1, n]\!]$ premiers avec n. En déduire que $\varphi(n) = n \prod_{p \in P_n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

JCH **Exercice 9** Une urne contient n boules blanches et une boule noire. On effectue une succession de tirages d'une boule à chaque fois. Si on tire la boule noire, on la remet dans l'urne avant le tirage suivant ; si on tire une boule blanche, on ne la remet pas dans l'urne. On note X le nombre de tirages nécessaires pour qu'il n'y ait plus aucune boule blanche dans l'urne. Calculer $P(X = n + 1)$. En donner un équivalent, quand $n \to +\infty$.

DE8 **Exercice 10** Bob monte les marches d'un escalier, par des pas de une ou deux marches. On représente ses choix par une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi donnée par $P(X_1 = 1) = p$ et $P(X_1 = 2) = 1-p$. On considère $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ le nombre de marches gravies après n pas, et $Y_k = \min\{n \mid S_n \geqslant k\}$.

1. Que représente Y_k ?
2. Exprimer $P(Y_k = n)$ en fonction de $P(Y_{k-1} = n - 1)$ et $P(Y_{k-2} = n - 1)$. Justifier soigneusement.

XSA **Exercice 11 ★ Records**. On effectue un tirage complet sans remise d'une urne avec $n \geqslant 2$ boules numérotées de 1 à n. On note $(x_1, \ldots, x_n)$ les numéros tirés. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on dit qu'il y a un record à l'instant k si $x_k = \max(x_1, \ldots, x_k)$ (il y a toujours un record à l'instant 1).

1. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, quelle est la probabilité qu'il y ait un record à l'instant k ?
   Indication : *Si on trouve une somme, il est possible de la calculer.*
2. On note R le nombre de records. Calculer
   (a) $P(R = 1)$
   (b) $P(R = 2)$

TAC **Exercice 12 ★ ★** Soit $r \geqslant 3$ et $n \leqslant 2^{\frac{r}{2}}$.

1. On considère un graphe non orienté à n sommets, où l'on choisit pour chaque paire de sommets de les relier par une arête avec une probabilité $\frac{1}{2}$, de manière indépendante. Si l'on fixe un ensemble de r sommets, quelle est la probabilité qu'ils soient tous reliés 2 à 2 ?
2. Montrer qu'il existe un graphe à n sommets tel que tout sous-ensemble de r sommets contienne deux sommets voisins et deux sommets non voisins. **Indication** : *Considérer le graphe aléatoire précédent.*

YZJ **Exercice 13** ★ ★ Les deux rives d'une rivière sont reliées par un système de 13 ponts comme sur la figure. Lors d'une innondation, chaque pont a une probabilité $\frac{1}{2}$ d'être détruit, indépendamment des autres. Quelle est la probabilité de pouvoir toujours passer d'une rive à l'autre après une inondation ?

$$\left|\begin{array}{ccccc} \dots & O & \dots & O & \dots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \dots & O & \dots & O & \dots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \dots & O & \dots & O & \dots \end{array}\right|$$

Indication : *On pourra considérer la probabilité qu'un bateau à mât puisse traverser le système de ponts de haut en bas après une inondation.*