Interro n°18

En priorité → 11

FSZ **Exercice 1** On considère la famille $\mathcal{F} = \big(P_1 = X^2 + X + 1, P_2 = X^2 - X - 1, P_3 = X^2 + X\big)$ de polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$. Montrer que $\mathcal{F}$ est libre.

QVM **Exercice 2** Soit $u\colon E \to F$ linéaire.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} u$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Si G est un sous-espace vectoriel de E, montrer que $u(G)$ est un sous-espace vectoriel de F.

XZE **Exercice 3** Soit $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \mapsto (2x + 2y, -x - y)$.

1. Déterminer des bases de $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$. On ne demande pas de justifier.
2. Montrer que $u \circ u = u$.

683 **Exercice 4** Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre, et $k \in [\![1, n-1]\!]$. Montrer que $F_k = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $G_k = \operatorname{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$ sont en somme directe.

RMY **Exercice 5** Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ qui commutent. Montrer que $\operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker} v$ sont stables par u.

SSA **Exercice 6** Soit $a \in \mathbb{R}$. Dans $\mathbb{R}_n[X]$, on considère la famille $\mathcal{F} = (1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est libre.
2. À l'aide de la formule de Taylor polynomiale, montrer que $\mathcal{F}$ est génératrice, et expliciter, pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, ses coordonnées dans la base $\mathcal{F}$.

2M4 **Exercice 7** Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et pour $a \in \mathbb{R}$, $E_a = \{f \in E \mid f(a) = 0\}$.

1. Donner la définition de la somme $E_a + E_b$. Pour $a \neq b$, a-t-on $E_a \oplus E_b$?
2. Montrer que si $a \neq b$, alors $E_a + E_b = E$.

OVN **Exercice 8** Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et u l'application définie par $u(f) = f - f''$.

1. Montrer que u est linéaire.
2. Déterminer $\operatorname{Ker} u$.
3. Montrer que $(\cosh, \sinh)$ est une base de $\operatorname{Ker} u$.

ZI7 **Exercice 9** Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\mathcal{A}_n$ (l'ensemble des matrices antisymétriques) et $\mathcal{S}_n$ sont supplémentaires.
Indication : *Indication : Pour la seconde moitié, raisonner par condition nécessaire, et prendre la transposée.*

T5Q **Exercice 10** Soit E un espace vectoriel et $x_1, \dots, x_n \in E$. On considère $u\colon \mathbb{K}^n \to E \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$.

1. Montrer que u est linéaire.
2. Montrer que u est surjective si et seulement si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est génératrice.
3. Montrer que u est injective si et seulement si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre.

PJ5 **Exercice 11** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ définie par $f\colon M \mapsto AM$.
Indication : $\operatorname{Im} f$ *et* $\operatorname{Ker} f$ *sont des sevs de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.

7LK **Exercice 12** Montrer que si $C + (A \cap B) = B$, alors $A + C = A + B$.

JJL **Exercice 13**

1. Pour $u, v \in \mathcal{L}(E)$, montrer que $\operatorname{Ker}(u \circ v) = \operatorname{Ker} v$ si et seulement si $\operatorname{Im} v \oplus \operatorname{Ker} u$.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$. Montrer que $\forall n \geqslant 2$, $\operatorname{Ker} u^n = \operatorname{Ker} u$.
3. ★ Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $v \in \mathcal{L}(E) \quad y \mapsto y'$. Montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = v$.
   Indication : *Les seuls sevs d'une droite vectorielle D sont $\{0\}$ et elle-même.*

L2D **Exercice 14** Montrer que la famille de fonctions $\big(f_k\colon x \mapsto \cos^k x\big)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est libre.

62X **Exercice 15** ★

1. Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et $\Phi\colon f \mapsto (x \mapsto (1 + x^2) f(x))$.
   (a) Montrer que Φ est un automorphisme de E.
   (b) Existe-t-il $F \subset E$ stable par Φ tel que (i) Φ_F ne soit pas injective ? (ii) Φ_F ne soit pas surjective ?
   Indication : *(ii) : Oui.*
2. Existe-t-il un automorphisme u de $\mathbb{R}[X]$ et $F \subset \mathbb{R}[X]$ stable par u tel que $u(F) \neq F$?
   Indication : *Définir une application linéaire sur $\mathbb{R}[X]$ revient à choisir les valeurs de $u(X^k)$, pour $k \in \mathbb{N}$.*

MFU **Exercice 16** ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \dots, A_{n+1}$ des parties non vides de $[\![1, n]\!]$.

1. Pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, on considère $v_k \in \mathbb{R}^n$ le vecteur indicateur de A_{k+1}, c'est-à-dire le vecteur de coordonnées $(v_k)_i = \begin{cases} 1 \text{ si } i \in A_k \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Montrer que la famille $(v_1, \ldots, v_{n+1})$ est liée.
2. Montrer qu'il existe deux ensembles d'indices $I, J \subset [\![1, n]\!]$, non vides et disjoints, tels que $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{j \in J} A_j$.