Interro n°19

En priorité : $\to$ ex 9.

21X **Exercice 1**

1. Rappeler la définition du rang d'une application linéaire et énoncer le théorème du rang.
2. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, expliciter une matrice M de rang 1, sans coefficients nuls.
3. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension finie n. Montrer que $\operatorname{rang}(u+v) \leqslant \operatorname{rang} u + \operatorname{rang} v$.

SSO **Exercice 2** Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{S}_n$ sont supplémentaires.
2. Soit p la projection sur $\mathcal{S}_n$ parallèlement à $\mathcal{A}_n$. Donner, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une expression de $p(M)$.

KPB **Exercice 3** Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_5[X] \mid P(1) = P'(1) = P(2) = 0\}$.

1. Donner sans justifier une base de F.
2. Donner un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_5[X]$. Justifier.

OK9 **Exercice 4** Soit E un espace vectoriel et p un endomorphisme de E tel que $p^2 = p$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont en somme directe.
2. Montrer que $E = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Im} p$.

UI7 **Exercice 5** Soit E un espace vectoriel, H un hyperplan de E et F un sous-espace vectoriel de E.

1. On suppose que E est de dimension finie n. Quelle est la dimension de H ? En appliquant Grassmann, en déduire que $\dim F \cap H \geqslant \dim F - 1$.
2. On suppose que F est de dimension finie. Rappeler la définition d'un hyperplan et en interprétant $F \cap H$ comme le noyau d'une applicaton, montrer que $\dim F \cap H \geqslant \dim F - 1$.

9BH **Exercice 6** Soit $(x_1, \dots, x_n)$ des réels distincts, et $\Phi\colon \mathbb{R}_{2n-1}[X] \to \mathbb{R}^{2n} \quad P \mapsto (P(x_1), \dots, P(x_n), P'(x_1), \dots, P'(x_n))$. Montrer que Φ est un isomorphisme.

183 **Exercice 7** Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de vecteurs de E.

1. Dans cette question, on suppose que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.
   (a) Définir une forme linéaire non nulle $\varphi\colon E \to \mathbb{K}$ telle que $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $\varphi(e_i - e_j) = 0$.
   (b) Montrer que la famille $\mathcal{F} = (e_i - e_j)_{i,j \leqslant n}$ n'est pas génératrice de E.
2. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (e_i - e_j)_{i,j \leqslant n}$ n'est pas génératrice de E.

ARF **Exercice 8 Formule de Grassmann**. Soit F, G deux sous-espaces vectoriels de E de dimensions finies. On considère $(h_1, \dots, h_r)$ une base de $F \cap G$. On complète $(h_1, \dots, h_r)$ en une base $(h_1, \dots, h_r, f_1, \dots, f_p)$ de F et en une autre base $(h_1, \dots, h_r, g_1, \dots, g_q)$ de G.

1. Montrer que $(h_1, \dots, h_r, f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est une base de $F + G$.
2. En déduire la formule de Grassmann.

E5I **Exercice 9** On considère l'endomorphisme $u\colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ défini par $u(P) = P(X+1) - P(X)$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, la restriction $u_n\colon \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}[X] \quad P \mapsto u(P)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant que $\forall k \in [\![1, n]\!], \deg u(X^k) = k - 1$ et que $u(1) = 0_{\mathbb{R}[X]}$, montrer que $u(\mathbb{R}_n[X]) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
2. (a) Montrer que u est surjective.
   (b) On note $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 0\}$. Montrer que u réalise un isomorphisme de F sur $\mathbb{R}[X]$.
   Indication : *On peut justifier à la main que tout $Q \in \mathbb{R}[X]$ admet un unique antécédent dans F, ou appliquer la forme géométrique du théorème du rang.*

T12 **Exercice 10** Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tel que $\forall x \in E$, $u(x) \in \operatorname{Vect}(x)$. Montrer que u est une homothétie vectorielle, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda \operatorname{Id}_E$.
Indication : *Pour $x \in E \backslash \{0\}$, il existe λ_x tel que $u(x) = \lambda_x x$. Pour $y \in E$, discuter selon si $y \in \operatorname{Vect} x$ ou non.*

WCY **Exercice 11** Soient E, F de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et V un sous-espace vectoriel de F. Montrer que $\dim f^{-1}(V) \geqslant \dim E + \dim V - \dim F$.
Indication : *Commencer par un théorème du rang, et simplifier les quantités qui apparaissent.*

NTT **Exercice 12 ★ Produits d'endomorphismes nilpotents**.

1. Soit u un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E de dimension n, montrer que $u^n = 0$
   Indication : *Considérer* $(\ker u^p)_{p \in \mathbb{N}}$.

2. On considère n endomorphismes nilpotents $u_1, \dots, u_n$ d'un espace de dimension n commutant deux à deux. Montrer que le produit $u_1 \dots u_n$ est nul.
   Indication : *Considérer* $F_i = \mathrm{Im}(u_1 \circ \cdots \circ u_i)$. *Remarquer que* F_i *est stable par* u_{i+1}.
3. Trouver les endomorphismes de $\mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$ dont le carré vaut la dérivation.

PRT **Exercice 13 ★ Lemmes de factorisation**. Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie. Soit $a \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in \mathcal{L}(E, G)$, montrer que $\mathrm{Ker}\, b \subset \mathrm{Ker}\, a$ si et seulement s'il existe $c \in \mathcal{L}(G, F)$ telle que $a = c \circ b$.
Indication : *Considérer un supplémentaire* H *de* $\mathrm{Im}\, b$.