Interro n°20

L42 **Exercice 1** On considère un jeu de 52 ($= 4 \times 10 + 4 \times 3$) cartes. Déterminer le nombre de mains possibles de 5 cartes

1. contenant un carré (quatre fois la même valeur)
2. contenant 5 valeurs distinctes (c'est-à-dire aucune paire)
3. contenant exactement deux paires (pas de brelan, pas de carré)

KYK **Exercice 2** Soit f une fonction convexe continue sur $[a, b]$. On note $t = \frac{a+b}{2}$.

1. Justifier que la fonction $\Delta_t \colon x \mapsto \frac{f(x)-f(t)}{x-t}$ est croissante sur $[a, b]$.
   Cela justifie l'existence de $\ell^- = \lim_{x\to t^-} \Delta_t(x)$ et $\ell^+ = \lim_{x\to t^+} \Delta_t(x)$ vérifiant $\ell^- \leqslant \ell^+$.
2. Soit $m \in [\ell^-, \ell^+]$. Montrer que $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \geqslant m(x-t) + f(t)$.

ROH **Exercice 3** Soient $x_1, \ldots, x_n > 0$. On pose $y_1 = x_2$, $y_2 = x_3$, etc, $y_{n-1} = x_n$ et $y_n = x_1$. Montrer que $\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y_i} \geqslant n$.
Indication : *Rappeler l'inégalité arithmetico-géométrique*

ORH **Exercice 4** Soit $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe continue.

1. Montrer que $\max\limits_{[a,b]} f = \max(f(a), f(b))$.
2. Que dire de l'ensemble des points où f atteint un minimum ?
   Indication : *Montrer que c'est un intervalle.*

61R **Exercice 5**

1. $2n$ joueurs participent au premier tour d'un tournoi. Ils doivent être répartis par paires, dans n locations fixées. Quel est le nombre de répartitions possibles ?
2. Déterminer le nombre de partitions de $[\![1, 2n]\!]$ en n parties de cardinal 2.

3R2 **Exercice 6** Quel est le nombre

1. d'applications strictement croissantes de $[\![1, 2]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?
2. d'applications croissantes de $[\![1, 2]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?
3. d'applications injectives de $[\![1, 2]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?
4. d'applications surjectives de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, 2]\!]$?

SFE **Exercice 7** Combien y a-t-il de n-uplets de $\{0, 1\}^n$

1. contenant autant de 0 que de 1.
2. avec le premier 1 en position k.

1Y9 **Exercice 8** Soit $p \in \mathbb{N}$, et $m \geqslant p$.

1. Dessiner le triangle de Pascal, et indiquer où se trouvent les $\binom{n}{p}$, pour $n \in [\![p, m]\!]$.
2. Montrer que $\sum\limits_{n=p}^{m} \binom{n}{p} = \binom{m+1}{p+1}$.

HHQ **Exercice 9**

1. Soit U_9 l'ensemble des racines 9-ième de l'unité. Quel est le nombre de façon de colorier U_9 de sorte qu'un seul élément soit de couleur rouge, trois de couleur verte et cinq de couleur bleue ?
2. ★ Quel est le nombre de colliers différents de neuf perles dont l'une est de couleur rouge, trois de couleur verte et cinq de couleur bleue ?

J54 **Exercice 10 Partitions d'un entier**.

1. Soit $E_{n,p}$ l'ensemble des $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ tels que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$. Déterminer $|E_{n,p}|$.
2. ★ Soit $F_{n,p}$ l'ensemble des $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^*$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = p$. Montrer que $|F_{n,p}| = \binom{p-1}{n-1}$.

9PB **Exercice 11** $f \colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ est convexe si et seulement si $x \mapsto xf(x)$ est convexe.

1. Sous l'hypothèse f deux fois dérivable.
2. ★ sans hypothèse.

4DD **Exercice 12** ★ Soit $s(n, k)$ le nombre d'applications surjectives de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots k\}$. Pour $1 \leqslant i \leqslant k$, on note E_i l'ensemble des applications de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, k\}$ dont l'image ne contient pas i.

1. Soit $1 \leqslant \ell \leqslant k$ et $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_\ell \leqslant k$ des entiers. Calculer le cardinal de $E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_\ell}$.
2. En utilisant la formule du crible, montrer que $s(n, k) = \sum\limits_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n$.

XLY **Exercice 13 Dérangements**. On appelle dérangement de $[\![1, n]\!]$ toute permutation σ de $[\![1, n]\!]$ n'admettant aucun point fixe. On note D_n le nombre de dérangements de $[\![1, n]\!]$ et on convient que $D_0 = 1$.

1. Montrer, pour $n \geqslant 0$, que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k = n!$.
2. ★ Montrer que $D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1})$. En déduire que pour tout $n \geqslant 2$, $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$.

D8N **Exercice 14** ★ Sur un polygone régulier à n côté, déterminer le cardinal du plus grand ensemble de sommets tels qu'aucun trois d'entre eux ne forment un triangle équilatéral.

4VO **Exercice 15** ★ Soient $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexes, telles que $\forall x$, $\max(f(x), g(x)) \geqslant 0$. Montrer qu'il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $(1-\lambda)f(x) + \lambda g(x) \geqslant 0$.
Indication : *Supposer que les fonctions sont dérivables. Faire un dessin.*