# Interro n°26

F6N **Exercice 1** Soient $X_1, X_2$ deux variables indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, retrouver une expression de $P(X_1 + X_2 = n)$ en fonction des lois de $X_1$ et $X_2$.

DGR **Exercice 2** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers de $[\![1, n]\!]$ qui sont premiers avec $n$.

1. Pour $p$ premier, donner la valeur de $\varphi(p)$, puis de $\varphi(p^\alpha)$. Justifier.
2. ★ On considère les fractions $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}$, et on réduit chacune sous forme irréductible. Pour $d$ divisant $n$, combien reste-t-il de fractions avec $d$ comme dénominateur ? En déduire la valeur de $\sum_{d|n} \varphi(d)$.

M3H **Exercice 3** Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On note $D = \operatorname{pgcd}(P, P')$.

1. Pour $P = (X-1)^3(X-2)^4$, calculer $P'$ et expliciter $D$.
2. Exprimer $\deg D$ en fonction de $n = \deg P$ et du nombre $r$ de racines distinctes de $P$. Justifier.
   **Indication** : *On trouve* $\deg D = \deg P - r$.
3. En déduire quels sont les polynômes unitaires $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P' \mid P$.

LJ4 **Exercice 4** Soient $X, Y$ deux variables indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, avec $p \in ]0,1[$. On pose $U = X+Y$ et $V = X - Y$.

1. Déterminer la loi du couple $(U, V)$.
2. Les variables $U, V$ sont-elles indépendantes ? Justifier soigneusement.

6PU **Exercice 5**

1. Montrer que $n+1$ divise $n^3 + 1$.
   **Indication** : *Factorisation de* $a^{2n+1} + b^{2n+1}$.
2. Déterminer les entiers naturels $n$ tels que $n+1$ divise $n^3 + 4$.

0CE **Exercice 6**

1. Soit $p$ un nombre premier congru à 3 modulo 4. Que vaut $(-1)^{\frac{p-1}{2}}$ modulo $p$ ?
   En déduire que $-1$ n'est pas un carré modulo $p$, c'est-à-dire qu'il n'existe pas $a \in \mathbb{Z}$ tel que $-1 \equiv a^2[p]$.
2. Soit $N \in \mathbb{N}$ pair. Montrer que $N^2 + 1$ n'a que des facteurs premiers congrus à 1 modulo 4.
3. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 4.

E7N **Exercice 7** Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $F_P$ l'ensemble des polynômes multiples de $P$ appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$

1. Quelle est la dimension de $F_P$, en fonction de $\deg P$ ?
2. Si $\deg P + \deg Q = n+1$ et $P \wedge Q = 1$, montrer que $\mathbb{R}_n[X] = F_P \oplus F_Q$

TMH **Exercice 8** Soient $X_1, X_2$ deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Pour $m \in [\![0, n-1]\!]$, on considère la variable $Z = \begin{cases} X_2 \text{ si } X_2 > m \\ X_1 \text{ sinon} \end{cases}$.

1. Rappeler la définition de l'espérance, et calculer l'espérance de $X_1$.
2. Déterminer la loi de $Z$.
   **Indication** : *Décrire l'évènement* $(Z = k)$*, en distinguant selon* $k > m$ *ou* $k \leqslant m$.
3. Espérance de $Z$.

S90 **Exercice 9** Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables indépendantes de même loi uniforme sur $\{\pm 1\}$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $Y_k = X_1 \dots X_k$. Montrer que les variables $Y_1, \dots, Y_n$ sont mutuellement indépendantes.
**Indication** : *Éventuellement : Traiter le cas* $n = 2$.

ET7 **Exercice 10** ♢ Soit $n \geqslant 2$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$, avec $p \in ]0,1[$. On note $C = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $M = CC^T$.

1. Déterminer les lois de $\det M$, $\operatorname{rang} M$ et $\operatorname{Tr} M$.
2. Quelle est la probabilité que $M$ soit une matrice de projection ?

28N **Exercice 11** ★ Deux joueurs $A$ et $B$ lancent une pièce. Les règles de gain sont les suivantes : pile rapporte 5 euros et face 4 euros. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, chacun des joueurs effectue $9n$ lancers indépendants ; on note $A_n$ (resp. $B_n$) la variable aleatoire donnant le gain du joueur $A$ (resp. $B$).

1. Trouver un équivalent, lorsque $n$ tend vers $+\infty$, de $P(A_n = B_n)$.
   **Indication** : *Noter* $A_n^*, B_n^*$ *le nombre de Pile obtenus. Utiliser une propriété de symétrie.*
2. Montrer que $P(A_n \geqslant B_n) \geqslant \frac{1}{2}$. Vers quoi tend $P(A_n < B_n)$ ?

DHP **Exercice 12** ★

1. Montrer que pour $n$ impair, $n$ divise $\sum_{k=1}^{n-1} k^n$.
2. Trouver les entiers $n \geqslant 1$ pour lesquels $n \mid 1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n$
   **Indication** : *Travailler modulo un diviseur judicieux, et appliquer utiliser le théorème d'Euler.*