Interro n°26

Durée : 1h. En priorité → 6.1 et 7.1.

DI9 **Exercice 1** Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel.
2. Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$

7F7 **Exercice 2** Soient F, G des sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E. Montrer que si $F \perp G$, alors $F \oplus G$.

SFZ **Exercice 3** Soit E un espace préhilbertien et $F = \mathrm{Vect}(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Pour $x \in E$, montrer que $x \perp F$ si et seulement si $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x \perp e_i$.

OXM **Exercice 4 Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.**

1. Montrer que $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^T B)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.
2. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de ce produit scalaire. Montrer que $\mathcal{A}_n \perp \mathcal{S}_n$.

1M5 **Exercice 5**

1. Montrer que $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que la famille $\left(\frac{1}{p!}(X-1)^p\right)_{0\leqslant p\leqslant n}$ est une BON de $\mathbb{R}_n[X]$ pour ce produit scalaire.

OPA **Exercice 6 Inégalité de Paley-Zygmund**.

1. Si X, Y sont des variables aléatoires réelles, montrer que $\mathbf{E}(XY)^2 \leqslant \mathbf{E}(X^2)\mathbf{E}(Y^2)$.
   Indication : *Considérer* $P(t) = \mathbf{E}\big((X+tY)^2\big)$.
2. Si X est une variable aléatoire réelle, montrer que $\mathbf{E}(X^2)\mathbf{P}(X \geqslant c) \geqslant \mathbf{E}(X\mathbf{1}_{X\geqslant c})^2$.
3. Si X est une VA réelle d'espérance positive et $\lambda \in]0,1[$, montrer que $\mathbf{P}(X \geqslant \lambda\mathbf{E}(X)) \geqslant (1-\lambda)^2 \frac{\mathbf{E}(X)^2}{\mathbf{E}(X^2)}$.

TZD **Exercice 7** Soit E un espace préhilbertien

1. Soient $x, y \in E$ non nuls. Justifier qu'il existe $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\cos\theta = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}$.

θ est appelé l'angle géométrique entre les vecteurs x et y.

2. On prend $E = \mathbb{R}^2$, avec le produit scalaire canonique. Soit $u \in \mathbb{R}^2$ unitaire, et $\sigma_u : x \mapsto x - 2\langle x, u\rangle u$.
   On admet que σ_u est la symétrie par rapport $(\mathrm{Vect}\, u)^\perp$, parallèlement à $\mathrm{Vect}\, u$
   (a) Représenter l'ensemble $\Omega_u = \big\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, u\rangle \geqslant 0 \text{ et } \langle x, \sigma_u(x)\rangle \leqslant 0\big\}$.
   (b) ★ Montrer que Ω_u est auto-dual, c'est-à-dire que $\Omega_u = \big\{y \in \mathbb{R}^2 \,;\, \forall x \in \Omega_u,\ \langle x, y\rangle \geqslant 0\big\}$.
   Indication : *Compléter u en une BON (u, v).*

6NP **Exercice 8 ★ ★ Inégalité de Kantorovich**. Soient $0 < \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$. Montrer que si $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$, alors

$$1 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{-1} x_i^2\right) \leqslant \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}} + \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}}\right)^2$$

Indication : *Pour l'inégalité difficile, considérer l'expression du milieu comme une fonction d'une des variables λ_i. Que dire de cette fonction ? En déduire que l'expression est maximale quand la famille des (λ_i) ne prend que deux valeurs. Alternative : chercher à utiliser l'inégalité arithmético-géométrique.*