

# Interro n°27

Durée : 1h. En priorité → 6.1 et 7.1.

OSF **Exercice 1** Soit  $E$  un espace préhilbertien et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie.

1. Compléter : «  $p_F(x)$  est l'unique vecteur de  $E$  vérifiant ... et  $\dots \in \dots$  ».
2. Montrer que  $\forall x \in E, \|p_F(x)\| \leq \|x\|$ .

ZOH **Exercice 2** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , avec  $E$  euclidien et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une BON de  $E$ .

1. Pour  $x \in E$ , montrer que les coordonnées de  $x$  dans  $\mathcal{B}$  sont les  $x_i = \langle x, e_i \rangle$ .
2. Que vaut  $\|x\|$ , en termes de ces coordonnées ?
3. Donner une expression de  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  et de  $\text{Tr}(u)$  en fonction des  $\langle u(e_i), e_j \rangle$ .

H9G **Exercice 3** Dans  $\mathbb{R}^n$  on considère  $\vec{z} = (1, 1, \dots, 1)$ .

1. Donner l'expression, pour  $x \in \mathbb{R}^n$  du projeté orthogonal de  $x$  sur  $\text{Vect } \vec{z}$ .
2. En déduire l'expression de la projection orthogonale de  $x$  sur  $H = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n \mid y_1 + \dots + y_n = 0\}$ .

5DY **Exercice 4** On considère  $E = \mathbb{R}_2[X]$  muni du produit scalaire  $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ .

1. Déterminer le projeté orthogonal  $R$  de  $P = X^2$  sur  $F = \text{Vect}(1, X)$ .
2. On considère  $\Delta = \inf_{a, b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (X^2 - aX - b)^2 dX$ . Exprimer  $\Delta$  en fonction de  $R$  et  $P$ .

YN1 **Exercice 5**

On rappelle que  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus^\perp \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

1. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Donner une expression simple de la projection orthogonale de  $A$  sur  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .
2. Interpréter  $\inf_{S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{i,j} (s_{ij} - a_{ij})^2$  en termes de distance, et l'exprimer comme la norme d'une matrice.

AJK **Exercice 6** Soient  $(e_1, \dots, e_p)$  et  $(f_1, \dots, f_p)$  deux familles orthonormales vérifiant

- (i)  $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_k)$ .
- (ii)  $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \langle e_k, f_k \rangle > 0$

Montrer que  $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, e_k = f_k$ .

W2Q **Exercice 7** Soit  $E$  un espace préhilbertien et  $F \subset E$  un sous-espace vectoriel de dimension finie.

1. Rappeler l'expression de la projection orthogonale  $p_F(x)$  en termes d'une BON de  $F$ .
2. Montrer que  $F \oplus F^\perp = E$ .

2AL **Exercice 8** Pour  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on pose  $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^T B)$ .

1. Montrer que  $|\text{Tr } A| \leq \sqrt{n} \|A\|$ .
2. ★ Montrer que  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ .

04V **Exercice 9 Produit vectoriel.** Soit  $E = \mathbb{R}^3$ , muni du produit scalaire canonique.

1. Soient  $u, v \in \mathbb{R}^3$ . Montrer qu'il existe un unique vecteur, noté  $u \wedge v$ , vérifiant

$$\forall w \in E, \det_{\mathcal{B}_{can}}(u, v, w) = \langle u \wedge v, w \rangle$$

2. Montrer que  $u \wedge v \in \text{Vect}(u, v)^\perp$ .

On peut vérifier que  $(u, v) \mapsto u \wedge v$  est bilinéaire et antisymétrique.

3SN **Exercice 10** Soit  $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$  une famille dans  $E$  euclidien. On considère  $G = (\langle f_i, f_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que si la famille  $\mathcal{F}$  est liée alors  $G$  est non inversible.
2. On suppose que  $\mathcal{F}$  est une base. On note  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  la famille obtenue par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
  - (a) Que dire de la matrice  $P = P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}}$  de passage de  $\mathcal{F}$  à  $\mathcal{B}$  ?
  - (b) ★ Montrer que  $G = Q^T Q$ , où  $Q = P^{-1}$ .
3. En déduire  $0 < \det(G) \leq \prod \|f_i\|^2$ .

0Y6 **Exercice 11 ★ Produits scalaires sur  $\mathbb{R}_n[X]$  sous forme d'intégrales.** Soit  $w$  une fonction continue strictement positive sur  $[-1, 1]$ .

On admet que  $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 w(t)P(t)Q(t) dt$  est un produit scalaire.

On note  $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$  la famille obtenue à partir de la base  $(X^k)$  par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, qui vérifie  $P_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X]^\perp$ .

1. ★ Montrer qu'il existe des réels  $a_i, b_i$  tels que  $P_i = (X + a_i)P_{i-1} - b_i P_{i-2}$  et que  $b_i > 0$ .

**Indication** : Considérer le polynôme  $P_i - X P_{i-1}$ .

2. ★ Montrer que les racines de  $P_i$  sont entrelacées avec celles de  $P_{i-1}$ , c'est-à-dire qu'en notant  $a_1, \dots, a_i$  celles de  $P_i$  et  $b_1, \dots, b_{i-1}$  celles de  $P_{i-1}$ , on a  $a_1 < b_1 < a_2 < \dots < b_{i-1} < a_i$ .

**Indication** : Procéder par récurrence. S'intéresser aux racines consécutives de  $P_{i-1}$ .