

Interro n°28

En priorité : jusqu'au 12.1.

N6B **Exercice 1** Sur $E = \mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbb{R})$, montrer soigneusement que $\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(t)g(t) \sin t \, dt$ est un produit scalaire.

45V **Exercice 2** Pour $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on définit $\langle P, Q \rangle = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1)$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est défini positif.
2. Montrer que $(X - 1)^2$ est orthogonal à $\mathbb{R}_1[X]$.
3. Donner une BON de $\mathbb{R}_2[X]$.

KZX **Exercice 3** Déterminer la partie entière de $R = \frac{X^4 + 2X^3 + 1}{X^2 + X + 1}$.

887 **Exercice 4** Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F^2 = X$.

ZS7 **Exercice 5** Soit $F = \text{Vect } a, b$ un sous-espace vectoriel de dimension 2 d'un espace euclidien.

1. Montrer qu'il existe exactement deux vecteurs $e_2, e'_2 \in F$ unitaires et orthogonaux à a .
Indication : F est un espace euclidien, de dim 2.
2. On pose $e_1 = \frac{a}{\|a\|}$, et pour $\theta \in [0, 2\pi[$, $f_\theta = e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta$. Montrer que $\theta \mapsto f_\theta$ réalise une bijection de $[0, 2\pi[$ dans l'ensemble des vecteurs unitaires de F .

OUR **Exercice 6** Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $f \in E$ strictement positive.

1. Énoncer une inégalité de CS dans E .
2. Montrer que $\int_0^1 \frac{dt}{f(t)} \geq \frac{1}{\int_0^1 f(t) dt}$.

RPU **Exercice 7** Déterminer une base orthonormale de $F = \text{Vect} \left(I_2, M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Indication : Il peut être judicieux de commencer par réordonner la famille, avant d'appliquer le procédé de GS.

F85 **Exercice 8** Soit E un espace préhilbertien et F, G deux sous-espaces vectoriels de E .

1. Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$
2. ★ Si E est euclidien, montrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$

9UP **Exercice 9** On considère $I = \inf_{a, b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (t - a\sqrt{t} - b)^2 dt$.

1. Interpréter I en termes de la distance d'un vecteur φ à un sev F de $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, pour le ps usuel.
On admet que la famille $(e_1 = \tilde{1}, e_2 : t \mapsto 3\sqrt{2}(\sqrt{t} - 2/3))$ forme une BON de F .
2. Déterminer le projeté orthogonal $p_F(\varphi)$ de φ sur F .
3. Montrer que $\|\varphi\|^2 = \|p_F(\varphi)\|^2 + \|\varphi - p_F(\varphi)\|^2$.
4. Donner une expression de I .

CWK **Exercice 10** Soit E un espace vectoriel euclidien, H_1, H_2 deux hyperplans de E et a_1, a_2 deux vecteurs non nuls, avec $a_1 \perp H_1$ et $a_2 \perp H_2$.

1. Justifier que H_1 et $\text{Vect } a_1$ sont supplémentaires.
2. On note s_i la symétrie par rapport à H_i parallèlement à $\text{Vect } a_i$.
(a) Que valent $\ker(s_i - \text{Id})$ et $\ker(s_i + \text{Id})$?
(b) ★ À quelle condition s_1 et s_2 commutent-elles?
Indication : Si s_1 et s_2 commutent, s_2 préserve $\ker(s_1 + \text{Id})$.

QCE **Exercice 11**

1. Soit $a = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Déterminer l'expression de la projection orthogonale de $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ sur $\text{Vect } a$.
2. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$.

6I4 **Exercice 12** Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, muni de $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^T B)$.

1. Rappeler, ou retrouver, l'expression de $\|A\|$.
2. Montrer que $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.
Indication : Utiliser l'inégalité de CS.

YFR **Exercice 13** Soit $f: E \rightarrow E$ une application non nécessairement linéaire qui préserve le produit scalaire, c'est-à-dire vérifiant $\forall x, y \in E, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

1. Soient $x, y \in E$. Montrer que $f(x + y) - f(x) - f(y) \perp (\text{Im } f)$.
2. Montrer que f est linéaire.

ZRM **Exercice 14** Soit E un espace euclidien, et p, q des projecteurs orthogonaux. Soit $x \in E$ tel que $p(x) = -q(x)$. Montrer que $p(x) = q(x) = 0$.

55N **Exercice 15** ★ Soit E un espace euclidien. Montrer que deux sevs F, G de E sont supplémentaires orthogonaux si et seulement si $\forall x \in E, \|x\|^2 = d(x, F)^2 + d(x, G)^2$.