

Interro n°29

En priorité → 9.

R2Q Exercice 1

1. Donner deux formes du $DL_1(a)$ d'une fonction $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 .
2. Pour $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , dériver $g: t \mapsto f(t^2, t^3)$.

5IK Exercice 2 Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . On suppose que $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Montrer qu'il existe $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $\forall x, y, f(x, y) = h(y)$.

YSN Exercice 3 Soit $f: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$.

1. Justifier brièvement que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, expliciter ses dérivées partielles et son gradient.
2. Montrer que f n'a pas de dérivées partielles en $(0, 0)$.

KCU Exercice 4 Soit $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 .

1. Montrer que si U est convexe et $\text{grad } f$ est nul, alors f est constante. **Indication** : Soient $a, b \in \mathbb{R}^2$.
2. Donner un contre-exemple si U n'est pas convexe.

YGB Exercice 5 On pose $\Delta = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Soit $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 vérifiant $(E): y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

1. Interpréter géométriquement (E) en considérant, en $M = (x, y)$, les vecteurs $\text{grad } f(M)$ et \overrightarrow{OM} .
2. En posant $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$, montrer qu'il existe une fonction $\varphi: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $\forall x, y \in \Delta, f(x, y) = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$. Qu'en est-il de la réciproque ?

DMX Exercice 6 Montrer que $f: (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est non continue en $(0, 0)$ mais admet des dérivées selon tout vecteur non nul en $(0, 0)$. **Indication** : C'est-à-dire que $g: t \mapsto f(tv)$ est dérivable.

Z53 Exercice 7 Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $f(x, y) = (x + y - 2)^2 + (2x - y)^2 + (x + 1)^2$.

1. Expliciter $\text{grad}(f)(x, y)$.
2. Expliciter $z_0 \in \mathbb{R}^3$ et $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tels que $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x, y) = \|g(x, y) - z_0\|_2^2$.
3. Déterminer $\inf_{x, y} f(x, y)$.

01L Exercice 8 Extrema de $f(x, y) = \cos x + y^2$

Indication : Il n'est pas nécessaire de chercher les points critiques, ni de se ramener à un compact. Des arguments élémentaires suffisent.

C9G Exercice 9 Soit $f: (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$.

1. Soit $S = \{(x, y, z), z = f(x, y)\}$. Déterminer l'équation du plan tangent à S en un point $(a, b, c) \in S$.
2. Soit $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \mid x \geq \frac{1}{10} \text{ et } y \geq \frac{1}{10} \text{ et } x \leq 100 \text{ et } y \leq 100\}$. Montrer que $f^{-1}([0, 10])$ est un fermé non vide inclus dans K .
3. Montrer que f est minorée puis qu'elle admet un minimum atteint en un point critique que l'on déterminera

ZCF Exercice 10 Fonctions convexes. Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . On dit que f est convexe si $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

1. Soit $x, y \in E$, et $g_{x, y}: t \in \mathbb{R} \mapsto f(x + ty)$. Montrer que si f est convexe, alors $g_{x, y}$ est convexe.

Réciproquement, si toutes les fonctions $g_{x, y}$ sont convexes, f est convexe.

2. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes à la convexité de f .

- (i) $\forall x, y \in E, f(x + y) \geq f(x) + \langle \text{grad } f(x), y \rangle$.
- (ii) $\forall x, y \in E, \langle \text{grad } f(y) - \text{grad } f(x), y - x \rangle \geq 0$.

Indication : Montrer f convexe \Rightarrow (i) \Rightarrow (ii) $\Rightarrow f$ convexe. Pour la dernière implication, montrer que $g_{x, y}$ est convexe.

3. Montrer que si f est convexe et admet un extremum local en a , alors celui-ci est global.

ZTR Exercice 11 ★ Preuve différentielle du théorème spectral. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $h: X \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\} \mapsto \frac{\langle SX, X \rangle}{\|X\|^2}$. Montrer que h admet un maximum et un minimum.

Indication : Que dire de $h(\lambda X)$?

K6N Exercice 12 ★ On munit \mathbb{R}^2 de sa structure euclidienne canonique. On considère le carré de coins $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$. On choisit trois points A, B et C sur ce carré.

1. Montrer qu'il existe une disposition des points A, B et C maximisant l'aire du triangle ABC .
2. Caractériser une telle disposition.

Indication : À partir d'une telle disposition, étudier l'effet d'une modification.