Oraux ; Série n°4

Exercice 1 [CCP MP]

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul.
2. Soit $n \geq 1$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$. Préciser leur nombre.
3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$. Démontrer que ce sont des nombres réels.

Exercice 2 [CCP PSI] Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\Phi\colon P \in \mathbb{R}[X] \mapsto (X-a)(P' - P'(a)) - 2(P - P(a))$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $(X-a)^k \mid \Phi(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$. Trouver le plus grand entier k qui vérifie cette condition.
3. Noyau et image de Φ.

Exercice 3 [Mines MP] Soit $n \geq 1$ et $\varphi\colon P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \mapsto \sum_{i=0}^{n} \big(i^n - P(i)\big)^2$.

1. L'application φ admet-elle un minimum ?
2. Calculer ce minimum.

Exercice 4 [Mines PSI] Aujourd'hui, nous sommes le vendredi 1er juillet 2022. Quel jour sera-t-on le 1er juin 2023 ?

Exercice 5 [ENS]

1. Soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ admettant un maximum en 0. Montrer que $g''(0) \leq 0$. Et si g est uniquement deux fois dérivable ?
2. Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose que $\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} > 0$. Montrer que la restriction de f à la boule unité euclidienne admet un maximum, atteint en un point de la sphère.
3. Même question, sous l'hypothèse $\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} \geq 0$. **Indication** : *Considérer* $f + \varepsilon(\sum x_i^2)$.

Exercice 6 [X] Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P\big(\frac{1}{\sqrt{2}}\big) = \sqrt{3}$? **Indication** : *La famille* $(1, \sqrt{3})$ *est* $\mathbb{Q}$*-libre. Généraliser.*

Exercice 7 [X] Une urne contient des boules bleues rouges, noires. À chaque étape on retire deux boules de couleurs différentes, et on ajoute une boule de la troisième couleur.

1. Montrer que si à la fin du procédé il ne reste qu'une seule boule, sa couleur est déterminée par la configuration initiale.
   Indication : *Considérer les nombres* n_{xy}, n_{yz}, n_{xz} *d'opérations de chaque type.*
2. À quelle condition initiale est-il possible de finir avec une seule boule ?

Oraux ; Série n°4

Exercice 1 [CCP MP]

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul.
2. Soit $n \geq 1$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$. Préciser leur nombre.
3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$. Démontrer que ce sont des nombres réels.

Exercice 2 [CCP PSI] Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\Phi\colon P \in \mathbb{R}[X] \mapsto (X-a)(P' - P'(a)) - 2(P - P(a))$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $(X-a)^k \mid \Phi(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$. Trouver le plus grand entier k qui vérifie cette condition.
3. Noyau et image de Φ.

Exercice 3 [Mines MP] Soit $n \geq 1$ et $\varphi\colon P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \mapsto \sum_{i=0}^{n} \big(i^n - P(i)\big)^2$.

1. L'application φ admet-elle un minimum ?
2. Calculer ce minimum.

Exercice 4 [Mines PSI] Aujourd'hui, nous sommes le vendredi 1er juillet 2022. Quel jour sera-t-on le 1er juin 2023 ?

Exercice 5 [ENS]

1. Soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ admettant un maximum en 0. Montrer que $g''(0) \leq 0$. Et si g est uniquement deux fois dérivable ?
2. Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose que $\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} > 0$. Montrer que la restriction de f à la boule unité euclidienne admet un maximum, atteint en un point de la sphère.
3. Même question, sous l'hypothèse $\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} \geq 0$. **Indication** : *Considérer* $f + \varepsilon(\sum x_i^2)$.

Exercice 6 [X] Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P\big(\frac{1}{\sqrt{2}}\big) = \sqrt{3}$? **Indication** : *La famille* $(1, \sqrt{3})$ *est* $\mathbb{Q}$*-libre. Généraliser.*

Exercice 7 [X] Une urne contient des boules bleues rouges, noires. À chaque étape on retire deux boules de couleurs différentes, et on ajoute une boule de la troisième couleur.

1. Montrer que si à la fin du procédé il ne reste qu'une seule boule, sa couleur est déterminée par la configuration initiale.
   Indication : *Considérer les nombres* n_{xy}, n_{yz}, n_{xz} *d'opérations de chaque type.*
2. À quelle condition initiale est-il possible de finir avec une seule boule ?